**Cálculo do raio da curva de estrada**

**DIULIANO VIEIRA DA SILVA**

**RESUMO**

*No estudo da aceleração centrípeta, em Física mecânica, questiona-se como estimar a velocidade máxima de um veículo em uma curva. Porém, na maioria das curvas de estradas tem-se apenas uma porção de uma circunferência. Através de cálculos de raio da circunferência, usando a trigonometria e planilhas do Excel, esse trabalho mostra a melhor maneira de realizar esses cálculos.*

**Palavras-chave:** aceleração centrípeta, física mecânica, raio, circunferência.

**1 INTRODUÇÃO**

No estudo da aceleração centrípeta, na parte mecânica da Física, surgiu o seguinte questionamento:

Como estimar a velocidade máxima de um veículo em uma curva, se a mesma, na maioria das vezes é menor que a metade de uma circunferência e com isso como estimar o seu raio para aplicar na fórmula:

Vmax= (igualdade de força de atrito com a força centrípeta: mgμ =, onde a massa m se cancela e isolando v para estimar a velocidade máxima)

**\*Nota:** g é aceleração da gravidade, μ e o coeficiente de atrito (estático) dos pneus com a estrada e R é o raio da curva (circunferência).

Para ilustrar a situação segue um exemplo prático:

comprimento D

FIG 1 comprimento S

Em uma meia circunferência é de imediata a aplicação da fórmula do comprimento de meio círculo:

S= πR (2πR dividido por 2)

Quando se conhece o comprimento S basta dividir por π para obter o raio (R= S/π), ou alternativamente, quando se conhece o comprimento D, que neste caso de meia circunferência, é o próprio diâmetro, basta dividir por 2 (R= D/2);

Porém, quando se tem apenas uma parte de uma circunferência (menos que a metade):

b

FIG 2 D/2

Percebe-se que b≠D/2≠R.

**\*Nota:** D é paralelo ao diâmetro e menor que o mesmo.

Essa é a ilustração do problema: na maioria das curvas de estradas tem-se apenas uma porção de uma circunferência, que se sabe apenas que é menos de sua metade. A partir daí surgem as seguintes questões: **Como calcular o raio R? Como calcular a área de uma porção de circunferência (como na figura anterior)**?

**2 DESENVOLVIMENTO**

Para achar a solução desse problema vamos visualizar a figura a seguir e contar com a ajuda da trigonometria.

S

D

R R

θ

FIG 3

Onde S é o comprimento do arco (ou da curva), θ é o ângulo formado entre as extremidades do arco com o centro da circunferência, D é a reta paralela ao diâmetro e R é o raio da curva que se quer encontrar.

Em uma situação prática, pode-se medir facilmente os comprimentos S e D; recorrendo à trigonometria temos as seguintes relações:

S = Rθ (comprimento do arco é igual ao raio vezes o ângulo em radianos)

D = 2Rsen (θ/2) (o comprimento D é igual a duas vezes o raio vezes o seno da metade do ângulo)

Tendo essas relações, dividindo S por D obtemos:

= , onde o raio se cancela e chegamos na seguinte relação:

Essa é uma equação em que se acha a solução pelo **método das tentativas,** para facilitar, podemos fazer uma planilha no Excel como ferramenta na obtenção do ângulo θ e com isso encontrar imediatamente o raio:

R = ou, alternativamente (e mais prático)

**R =**

**\*Nota:** o ângulo deve ser em radianos, e em meia circunferência θ é igual a π (180 graus), com isso sen(π/2)=1, obtendo R=S/π ou R=D/2, consistente com o exemplo prático dado na introdução.

Para se calcular a área, vamos inicialmente visualizar a figura:

θ

FIG 4

Primeiramente vamos encontrar a área compreendida entre o ângulo θ, e para isso podemos utilizar a regra de três simples:

=

Se para a circunferência inteira, ou seja, θ igual a 2π a área é igual a πr², para um ângulo θ a área é igual a **A**.

A =

Visualizando a figura:

área P

D

h

FIG 5 R

θ

É possível notar que a área da porção de circunferência (P) nada mais é que a área A menos a área do triangulo, designado por T, assim temos:

T = Dh/2

(Área do triangulo é igual ao comprimento D vezes a altura h dividido por 2)

A altura h pode ser encontrada pela relação da trigonometria novamente:

h = Rcos(θ/2) altura do triangulo é igual ao raio vezes o cosseno da metade do ângulo θ.

Finalmente podemos chegar na fórmula da área de uma porção de circunferência:

P = A – T

**P = (θR – Dcos(θ/2))**

Chegadas às relações matemáticas, é importante testar a validade das mesmas através de um experimento simples:

Marcas dois pontos em um CD e traçar uma reta entre eles, como exemplo segue uma ilustração:

S

D

FIG 6

Designando por D o comprimento da reta traçada e S o arco (ou a curva) acima, **é preciso medir com muita atenção**. Para medir S, pode-se usar uma fita métrica ou então rolar o cd em um local plano marcando os dois pontos e medindo com uma régua o comprimento.)

As medidas foram as seguintes:

S = 9,4 cm ; D = 8,5 cm

**\*Nota**: essas são as medidas em questão, sendo possível chegar aos mesmos resultados com outras medidas devidamente realizadas.

Com a ajuda do Excel podemos encontrar o ângulo θ:

θ 1,5385 rad

Portanto o raio é:

R = R6,11 cm

Na medição direta do CD em questão, o diâmetro é 12,2 cm, assim:

R=12,2/2= 6,1 cm

Divergindo assim de apenas 0,16% do calculado.

Esse erro é inerente a imprecisão das medidas realizadas e ao método empregado (Excel) para estimar o ângulo.

**Quanto melhor forem feitas as medições e o método das tentativas empregado, menor será o erro do cálculo.**

Agora basta verificar a consistência dos cálculos das áreas A, T e P (utilizando-se dos dados anteriores):

Para verificarmos a área A, vamos analisar a figura a seguir:

R

D

FIG 7 θ/2

A área **A** deve ser maior que a área do triangulo (T) abaixo da porção de circunferência, ou seja:

Fazendo as devidas substituições obtém-se:

28,72 cm² cm²

Obtendo-se uma diferença de aproximadamente 10,06 cm², e é possível verificar essa diferença, analisando a figura a seguir:

b

FIG 8 D

Onde b (o mesmo da fig 2) é dado pela diferença do raio R e a altura h do triângulo da fig 5, portanto, a diferença anterior deve ser menor que a área do quadrado:

10,06 Db

Db = DR(1 - COS(θ/2))

Fazendo as devidas substituições:

**b = R – h = 1,72 cm (h = Rcos(θ/2))**

10,06 cm² cm²

O que aparentemente está de acordo. Como teste final, é preciso verificar a validade da equação da área da porção de circunferência p.

Como os dados anteriores temos:

**P = (θR – Dcos(θ/2))**

Fazendo as devidas substituições:

P = 10,06 cm²

Justamente a diferença entre A e T calculada anteriormente.

E para verificarmos este resultado vamos analisar a próxima figura:

b

FIG 9

D

Dessa forma, pode-se notar que a área P deve ser maior que a área do triângulo da fig. 9 e menor que o quadrado da fig. 8, portanto:

Substituindo:

7,31 10,06

**3 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Pela geometria podemos verificar a consistência das equações para se achar θ, R e P, respectivamente. Agora só falta verificar o resultado do limite quando S tende a D:

=

A substituição direta no segundo limite da igualdade não é possível por se tratar de um “limite indeterminado” do tipo , podemos, no entanto, usar a regra de L’Hôspital:

Finalmente obtemos:

= = 1

Que está de acordo com a realidade.

**REFERÊNCIAS**

**Livro de Cálculo (James Stewart-volume I- 5ª edição)**

**Livro de Física Mecânica (Young e Freedman-volume I-12ª edição)**