

Beleza matemática: abordagem integrativa entre o Último Teorema de Fermat e a fórmula de Euler da análise complexa

Resumo

A matemática consegue integrar maravilhosamente a arte e o conhecimento científico. Desde os primórdios das civilizações, a arte e a matemática estão intrinsecamente interligadas. A beleza de uma reflete na outra e vice-versa. É um grande mistério como a arte e a matemática se ligam em diferentes *frameworks* para formar a base do conhecimento científico. A matemática influenciou a arte e a arte influenciou a matemática desde que ela existiu. Na intrincada dança entre matemática e a arte, os limites muitas vezes ficam confusos, sendo muito difícil definir onde termina um e começa o outro. A matemática e a arte formam a beleza que é uma propriedade fundamental da Ciência. A Ciência realmente não existiria sem a matemática e a arte. Em muitas situações que envolvem o estado da arte em estudos matemáticos, é possível integrar partes aparentemente desconexas, e criar um quadro artístico belíssimo de grande valor científico. Por exemplo, que beleza resultaria da integração do Último Teorema de Fermat e a Fórmula de Euler? Que estado da arte pode ser criado dessa integralidade? O Último Teorema de Fermat mostra que não existem três números inteiros positivos que sejam uma solução para $x^n + y^n = z^n$ para qualquer “ n ” maior que 2. O grande matemático Leonhard Euler desenvolveu uma das mais fantásticas fórmulas da matemática que integra cinco importantes constantes da natureza, que são 0, 1, e , π , i na identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$. Euler mostrou que todo número complexo pode ser escrito pela fórmula: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$. Sendo assim, e dentro desse contexto, o presente artigo teve como objetivo desenvolver uma abordagem integrativa entre o Último Teorema de Fermat e a Fórmula de Euler da análise complexa. Para tanto, foram realizadas operações algébricas integradas no campo dos números reais e complexos. Os resultados obtidos mostraram que, semelhantemente ao que acontece no campo dos números reais, a operacionalidade do Último Teorema de Fermat continua válida para $n = 2$ no campo dos números complexos.

Palavras-chave: Análise complexa; Análise real, Álgebra abstrata; Complexidade matemática; Números complexos.

1. INTRODUÇÃO

A matemática é extremamente útil. Suas aplicações práticas vão da engenharia à astronomia, dos negócios à medicina e ao planejamento urbano. Mas, nem todos estão conscientes da sua natureza fascinante. Na verdade, a matemática pode ter um apelo estético igual ao de qualquer coisa nas artes. Matemática é um assunto frequentemente associado a números, equações e fórmulas. No entanto, é muito mais do que isso. A matemática é uma linguagem que nos permite descrever e compreender o mundo que nos rodeia de forma precisa e lógica.

O estudo da matemática remonta a milênios e é frequentemente considerado um dos campos de estudo mais esteticamente agradáveis. A beleza da matemática reside na sua capacidade de explicar fenômenos complexos de uma forma simples e elegante. É uma linguagem que pode ser usada para descrever tudo, desde o movimento dos planetas até o comportamento das partículas subatômicas. Outro belo aspecto da matemática é a sua capacidade de resolver problemas. Fornece-nos os meios para resolver problemas difíceis em disciplinas como física, engenharia e economia. Por exemplo, o cálculo nos permite calcular taxas de variação e otimizar funções. A álgebra linear nos permite resolver sistemas de equações com múltiplas variáveis. Estas ferramentas revolucionaram muitos campos e permitiram-nos fazer avanços incríveis na ciência e na tecnologia.

A matemática fornece raciocínio abstrato. A matemática lida com conceitos abstratos e nos permite raciocinar e explorar ideias além do mundo físico. Fornece uma estrutura para o pensamento lógico e a resolução de problemas, permitindo-nos compreender fenômenos complexos e fazer previsões. Expressão Criativa e Estética também pode ser fornecida. A matemática pode ser vista como uma forma de arte criativa. Os matemáticos muitas vezes descrevem o seu trabalho como elegante e bonito quando descobrem soluções concisas e elegantes para problemas complexos. A simplicidade e elegância das provas e fórmulas matemáticas têm um apelo estético, semelhante a uma obra de arte.

A matemática também possui uma beleza estética que pode ser apreciada puramente por si mesma. A elegância e a simplicidade das provas matemáticas são frequentemente comparadas a obras de arte ou música. Os matemáticos buscam elegância em suas demonstrações, usando apenas suposições e passos lógicos necessários. Esta busca pela elegância levou os matemáticos a descobrir conexões inesperadas entre áreas aparentemente não relacionadas da matemática.

Além de suas aplicações práticas e beleza estética, a matemática também é importante por seu papel na educação. A matemática nos ensina habilidades de pensamento crítico, habilidades de resolução de problemas e raciocínio lógico. Essas habilidades são essenciais para o sucesso em muitos campos, incluindo ciência, engenharia e finanças. A matemática também nos ensina a apreciar a beleza dos padrões e a elegância dos argumentos lógicos. Outro aspecto da matemática que a torna bela é a sua elegância e simplicidade. O teorema de Pitágoras, por exemplo, que afirma que num triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, é uma afirmação simples, mas poderosa, que tem sido usada há milhares de anos.

Verdadeiramente, a matemática tem uma beleza inerente à sua abstração. Conceitos como infinito ou números imaginários podem parecer estranhos ou até absurdos à primeira vista, mas, são essenciais para a compreensão de muitos conceitos matemáticos e têm aplicações práticas em áreas como física e engenharia. As explicações matemáticas de eventos complicados são sua beleza. A matemática resolve muitos problemas e é linda. Promove o pensamento crítico, a resolução de problemas e a lógica. “A matemática pura é, a seu modo, a poesia das ideias lógicas”, observou Einstein. A matemática é bela porque nos ajuda a perceber padrões e correlações em nosso ambiente, tem beleza e simplicidade que a tornam acessível a todos e tem noções abstratas que desafiam nosso conhecimento da realidade.

A matemática consegue integrar dentro do seu domínio, temáticas aparentemente desconexas, criando novos padrões de beleza simplesmente surpreendentes. Esse hibridismo é fundamental para que haja o surgimento de novas propriedades. Na antologia da matemática, o Último Teorema de Fermat e a Fórmula de Euler da análise complexa são duas grandes entidades que se destacam por sua beleza estética e elegância. Qual beleza matemática resultaria da união desses dois entes?

Um dos mais famosos de todos os problemas da teoria dos números, sem solução há mais de 350 anos, é conhecido como o Último Teorema de Fermat. Na margem de um exemplar da “Aritmética” de Diofanto, ao lado de um problema relativo a escrever um quadrado como a soma de dois quadrados, Fermat escreveu que é impossível escrever um cubo como a soma de dois cubos, uma quarta potência como a soma de duas quartas potências, e assim por diante. Fermat afirmou que a equação $x^n + y^n = z^n$ não pode ser resolvida quando $n > 2$. Em junho de 1997, Andrew J. Wiles recebeu o Prêmio Wolfskehl, que não era reivindicado há 89 anos, por provar o Último Teorema de Fermat. Se não tivesse estudado curvas elípticas em Cambridge, Wiles poderia não estar preparado para fazer o trabalho que levou à sua prova bem-sucedida. Uma prova do Último Teorema de Fermat significa que construir boas sequências

criptográficas com períodos iguais a potências de números primos em muitos campos é teoricamente possível (**Page, 2001**).

No mundo dos números complexos, à medida que se integra expressões trigonométricas, provavelmente, encontra-se a chamada fórmula de Euler da análise complexa ($z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$) (**Zill; Shanahan, 2009**). Nomeada em homenagem ao lendário matemático Leonhard Euler, essa maravilhosa equação merece um exame mais detalhado, para que se possa utilizá-la em todo o seu potencial. A fórmula de Euler nos permite expressar números complexos como exponenciais e explorar as diferentes maneiras pelas quais ela pode ser estabelecida com relativa facilidade. A identidade de Euler é frequentemente considerada a “mais bela equação matemática” devido à sua simplicidade e capacidade de mostrar a relação entre cinco constantes essenciais da matemática. Nenhuma outra equação expressa a relação de tantas constantes em vários campos matemáticos de maneira tão simples. A identidade de Euler nos ajuda a compreender melhor os números complexos e suas relações com a trigonometria (**Zill; Shanahan, 2009**). Tem sido benéfico em computação gráfica, robótica, navegação, dinâmica de voo, mecânica orbital e análise de circuitos, onde números complexos e cálculo são usados. Ao longo dos anos, muitos grandes matemáticos e cientistas glorificaram esta equação simples e elegante acima de outras soluções matemáticas. Richard Feynman, físico e ganhador do Prêmio Nobel, chamou-a de “nossa joia” e considerou-a “a fórmula mais notável da matemática” (**Crease, 2011**). Embora esta equação seja glorificada por muitos, apenas alguns a compreendem.

O Último Teorema de Fermat e a fórmula de Euler da análise complexa são belezas distintas do grande quadro artístico da matemática. Aparentemente, essas entidades matemáticas são desconexas entre si. Por um lado, tem-se a elevada complexidade matemática na prova da demonstração do Último Teorema de Fermat dada por Wiles (**Page, 2001**); enquanto que por outro, a beleza da simplicidade da fórmula de Euler da análise complexa. É exatamente usando a fórmula de Euler que se obtém a identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$ que une as cinco constantes fundamentais da matemática: 0, 1, e , π , i . Essa ligação é tão extraordinária que resulta numa complexidade irreduzível (**Silva; Cruz, 2018**). Sendo assim, e dentro desse contexto, o objetivo do presente artigo foi utilizar operações matemáticas da análise real e complexa com a finalidade de realizar uma abordagem integrativa entre o Último Teorema de Fermat e a fórmula de Euler da análise complexa.

2. METODOLOGIA

A metodologia utilizada no presente trabalho constou de diversas operações matemáticas realizadas no campo dos números reais e complexos. Assim, foram consideradas as operações desenvolvidas na solução heurística do Último Teorema de Fermat, conforme foi mostrado por Cruz, Silva e Júnior (2023):

Cálculos da solução heurística do último Teorema de Fermat

Escrevendo x , y e z como a razão de dois números. O último teorema de Fermat diz que $x^n + y^n = z^n$ não tem solução para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$ com x, y e $z \in \mathbb{Z}$ ou x, y e $z \in \mathbb{Q}$, pois, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Nesse trabalho considerou-se x, y e $z \in \mathbb{Q}$. Portanto, podemos escrever x , y e z como a razão de dois números:

$$x = \frac{a_1}{b_1} \in \mathbb{Q} \text{ com } a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$$

$$y = \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q} \text{ com } a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$$

$$z = \frac{a_3}{b_3} \in \mathbb{Q} \text{ com } a_3, b_3 \in \mathbb{Q}$$

Proposta heurística

Heuristicamente, no presente trabalho foi considerado que: $x_1^n + y_1^n = z_1^n \rightarrow$ com $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$, x_1, y_1 e $z_1 \in \mathbb{Q}$.

$\mathbb{N} \rightarrow$ Conjunto dos números naturais.

$\mathbb{Z} \rightarrow$ Conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{Q} \rightarrow$ Conjunto dos números racionais.

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \rightarrow$ todo inteiro é racional.

$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$

$(z_1^n)^2 = (z_1^2)^n \rightarrow$ Uma das propriedades da potência.

Hipótese de estudo

Para dar prosseguimento à proposta heurística e analisando a sua viabilidade, considerou-se o seguinte sistema:

$$(I) \quad x_1^n + y_1^n = z_1^n$$

$$(II) \quad (x - x_1^n) \cdot (x - y_1^n) = 0$$

Com x_1, y_1 e $z_1 \in \mathbb{Q}$; $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Maiores detalhes sobre a solução heurística do Último Teorema de Fermat encontram-se apresentados em [Cruz, Silva e Júnior \(2023\)](#). Portanto, dentro do contexto analisado até o presente momento, buscou-se relações matemáticas entre a solução heurística do Último Teorema de Fermat, a equação do segundo grau e a fórmula de Euler da análise complexa, como abordado a seguir:

3.1. Fórmula de Euler

$$(e)^{\theta i} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta).$$

Como se trata da fórmula de Euler da análise complexa, então, podemos considerar $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, pois, o ângulo θ irá desaparecer durante os cálculos, em decorrência de ser dividido por ele mesmo. O ângulo θ pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, 2\pi]$.

Para iniciar, consideremos $n \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$. Dado $z = a + bi$ (número complexo) então:

$$z = r (e)^{\theta i} \text{ com } r = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$$

Da solução heurística ([Cruz; Silva; Júnior, 2023](#)) foi possível mostra que:

$$\left(\frac{x_1}{2p^2}\right)^n + \left(\frac{y_1}{2p^2}\right)^n = \left(\frac{v_1 \cdot y_1}{p^2 \cdot z_1}\right)^{n-1}$$

Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2v_1; 2 \cdot \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2}\right)^n = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ \cos(\theta) &= \frac{x_1}{p} \\ \operatorname{sen}(\theta) &= \frac{y_1}{z_1 p} \end{aligned}$$

Mediante tais considerações tem-se que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{2p^2}\right)^n + \left(\frac{y_1}{2p^2}\right)^n &= \left(\frac{2v_1 \cdot y_1}{2p^2 \cdot z_1}\right)^{n-1} \text{ com } n \geq 2 \text{ e } n \in \mathbb{N} \\ \left(\frac{x_1}{2p^2}\right)^n + \left(\frac{y_1}{2p^2}\right)^n &= \left(\frac{x_1 \cdot y_1 \cdot 1}{p^2 \cdot z_1 \cdot 2}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{x_1}{2p^2}\right)^n + \left(\frac{y_1}{2p^2}\right)^n &= \left(\frac{x_1 \cdot y_1 \cdot 1}{p \cdot z_1 p \cdot 2}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{x_1}{2p^2}\right)^n + \left(\frac{y_1}{2p^2}\right)^n &= \left[\cos(\theta) \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \frac{1}{2}\right]^{n-1} \end{aligned}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta)\cos(\theta) &= 2 \cdot \left[\frac{x_1 y_1}{z_1^2}\right]^n \\ \left(\frac{x_1}{2p^2}\right)^n + \left(\frac{y_1}{2p^2}\right)^n &= \left[2 \cdot \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}\right]^{n-1} \\ \left(\frac{x_1}{2p^2}\right)^n + \left(\frac{y_1}{2p^2}\right)^n &= \left[\left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2}\right)^n\right]^{n-1} \\ \left(\frac{x_1}{2p^2}\right)^n + \left(\frac{y_1}{2p^2}\right)^n &= \left[\frac{x_1 y_1}{z_1^2}\right]^{n^2-n} \end{aligned}$$

Obs.:

\mathbb{R} (conjunto dos números reais)

\mathbb{Z} (conjunto dos números complexos)

$\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$ pois $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a = a + 0i$

Se $W_1 = a_1 + b_1 i$ e $W_2 = c_1 + d_1 i$

$W_1 = W_2 \Rightarrow$

$a_1 + b_1 i = c_1 + d_1 i \Rightarrow$

$a_1 = c_1$

$b_1 = d_1$

Considerando o conjunto dos números complexos pode-se fazer:

$$W_1 = \frac{x_1 y_1}{z_1^2} = \frac{x_1 y_1}{z_1^2} + 0i$$

Pela fórmula de Euler da análise complexa, tem-se:

$$W_1 = r_1 \cdot e^{\theta i}$$

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2}\right)^2 + (0)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2}\right)^2} = \frac{x_1 y_1}{z_1^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\frac{x_1 y_1}{z_1^2}}{\frac{x_1 y_1}{z_1^2}} = 1$$

Logo, $\theta = 2\pi$

$W_1 = r_1 \cdot e^{2\pi i}$, ou seja

$$\frac{x_1 y_1}{z_1^2} = r_1 \cdot e^{2\pi i}$$

Substituindo tem-se:

$$\left(\frac{x_1}{2p^2}\right)^n + \left(\frac{y_1}{2p^2}\right)^n = [r_1 \cdot e^{2\pi i}]^{n^2-n}$$

$$\left(\frac{x_1^n + y_1^n}{(2p^2)^n}\right) = (r_1)^{n^2-n} \cdot e^{(n^2-n) \cdot 2\pi i}$$

Em decorrência de uma das equações do sistema apresentado na solução heurística do Último Teorema de Fermat (Cruz; Silva; Júnior, 2023) tem-se:

$$(x_1)^n + (y_1)^n = (z_1)^n$$

Substituindo, tem-se:

$$\left(\frac{(z_1)^n}{(2p^2)^n}\right) = (r_1)^{n^2-n} \cdot e^{(n^2-n) \cdot 2\pi i}$$

$$\left(\frac{z_1}{2p^2}\right)^n = (r_1)^{n^2-n} \cdot e^{(n^2-n) \cdot 2\pi i}$$

Considerando que:

$$W_2 = \frac{z_1}{2p^2} = \frac{z_1}{2p^2} + 0i$$

Pela relação de Euler tem-se que:

$$W_2 = r_2 e^{\theta i}$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{z_1}{2p^2}\right)^2 + (0)^2} = \sqrt{\left(\frac{z_1}{2p^2}\right)^2} = \frac{z_1}{2p^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\frac{z_1}{2p^2}}{\frac{z_1}{2p^2}} = 1$$

Logo, $\theta = 2\pi$

$$W_2 = r_2 e^{2\pi i}, \text{ ou seja } \frac{z_1}{2p^2} = r_2 e^{2\pi i}$$

Substituindo-se tem:

$$\begin{aligned} [r_2 e^{2\pi i}]^n &= [r_1 e^{2\pi i}]^{n^2-n} \\ (r_1)^{n^2-n} \cdot e^{[2\pi i n^2 - 2\pi i n]} &= (r_2)^n \cdot e^{2\pi i n} \end{aligned}$$

Aplicando Logaritmo em ambos os lados, tem-se:

$$\text{Ln} [(r_1)^{n^2-n} \cdot e^{[2\pi i n^2 - 2\pi i n]}] = \text{Ln} [(r_2)^n \cdot e^{2\pi i n}]$$

$$\text{Ln} [r_1]^{n^2-n} + \text{Ln}(e)^{[2\pi i n^2 - 2\pi i n]} = \text{Ln} [r_2]^n + \text{Ln}[e]^{2\pi i n}$$

$$\text{Obs.: } \text{Ln}(e) = \log_e e = 1$$

$$\text{Ln} [r_1]^{n^2-n} + (2\pi i n^2 - 2\pi i n) \text{Ln}(e) = \text{Ln} [r_2]^n + 2\pi i n \text{Ln}(e)$$

$$\text{Ln} [r_1]^{n^2-n} + (2\pi i n^2 - 2\pi i n) \text{Ln}(e) = \text{Ln} [r_2]^n + 2\pi i n \text{Ln}(e)$$

$$\text{Ln} [r_1]^{n^2-n} + 2\pi i n^2 - 2\pi i n = \text{Ln} [r_2]^n + 2\pi i n$$

$$\boxed{\text{Ln}[r_1]^{n^2-n} + [2\pi n^2 - 2\pi n]i = \text{Ln}[r_2]^n + [2\pi n]i}$$

Tem-se aqui uma igualdade de números complexos e devido a isso e também em relação a parte imaginária, obtém-se:

$$\begin{aligned} 2\pi n^2 - 2\pi n &= 2\pi n \\ 2\pi [n^2 - n] &= 2\pi [n] \\ n^2 - n &= n \text{ ou } n = n^2 - n \\ n^2 - 2n &= 0 \\ n[n - 2] &= 0 \\ \mathbf{n} &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

Conforme foi demonstrado por Cruz e Silva (2023) na solução heurística do Último Teorema de Fermat, o sistema abaixo só tem solução para $\mathbf{n} = \mathbf{2}$.

$$\begin{cases} x_1^n + y_1^n = z_1^n \\ (x - x_1^n)(x - y_1^n) = 0 \end{cases}$$

Semelhantemente, a utilização da fórmula de Euler mostra que o sistema (com x_1, y_1 e $z_1 \in \mathbb{Q}$) também tem solução válida apenas para $\mathbf{n} = \mathbf{2}$. Isso é incrivelmente fantástico! É um indicativo de que o Último Teorema de Fermat tem validade no campo dos

números complexo. É um quadro artístico de beleza matemática extraordinária.

3.2. Relações de conjecturas

Fazendo conjecturas de validade para diferentes valores de “n” obtidos pela fórmula de Euler da análise complexa e o Último Teorema de Fermat, é fácil mostrar que, para $n > 2$ é falso, pois:

$$\begin{aligned}
 n &\Rightarrow n = n^2 - n \\
 3 &\Rightarrow 3 = 3^2 - 3 \\
 &\quad 3 = 9 - 3 \\
 &\quad 3 = 6 \text{ (falso)} \\
 4 &\Rightarrow 4 = 4^2 - 4 \\
 &\quad 4 = 16 - 4 \\
 &\quad 4 = 12 \text{ (falso)} \\
 &\quad \vdots \\
 n &\Rightarrow n = n^2 - n \text{ falso para } n \geq 3 \text{ de acordo os}
 \end{aligned}$$

parâmetros matemáticos estabelecidos no trabalho.

O sistema (com x_1, y_1 e $z_1 \in \mathbb{Q}$):

$$\begin{cases} x_1^n + y_1^n = z_1^n \\ (x - x_1^n)(x - y_1^n) = 0 \end{cases} \text{ com } (n \geq 2, n \in \mathbb{N})$$

É verdadeiro para $n = 2$ e falso para $n \geq 3$ de acordo os parâmetros matemáticos estabelecidos no presente trabalho. Considerarmos o conjunto dos números complexos e a fórmula de Euler $(e)^{\theta i} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, analisemos a parte real conforme relação abaixo:

$$Ln [r_1]^{n^2-n} = Ln [r_2]^n$$

$$(n^2 - n)Ln[r_1] = nLn[r_2]$$

Para $n = 2$ vamos demonstrar que a parte real são iguais entre si. Supondo que $r_1 = r_2$, então tem-se:

$$\boxed{\frac{z_1}{2p^2} = \frac{x_1 y_1}{z_1^2}}$$

De acordo com as manipulações algébricas da solução heurística do Último Teorema de Fermat (Cruz e Silva, 2023), tem-se que:

$$\text{sen}(\theta)\cos(\theta) = 2 \cdot \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2}\right)^n \text{ com } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ e que}$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{y_1}{pz_1}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_1}{p}$$

$$\text{sen}(\theta)\cos(\theta) = 2 \cdot \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2}\right)^2 \text{ para } n = 2.$$

Substituindo-se tem:

$$\boxed{\frac{x_1}{p} \cdot \frac{y_1}{pz_1} = 2 \cdot \frac{x_1^2 y_1^2}{z_1^4}} \Rightarrow \boxed{\frac{x_1 y_1}{p^2 z_1} = 2 \cdot \frac{x_1^2 y_1^2}{z_1^4}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p^2} = 2 \cdot \frac{x_1^2 y_1^2}{z_1^4} \cdot \frac{z_1}{x_1 y_1}$$

$$\boxed{\frac{1}{2p^2} = \frac{x_1 y_1}{z_1^3}}$$

$$2p^2 \cdot x_1 y_1 = z_1^3$$

$$\boxed{2p^2 = \frac{z_1^3}{x_1 y_1}}$$

Substituindo-se tem:

$$\frac{z_1}{2p^2} = \frac{x_1 y_1}{z_1^2}$$

$$z_1 \cdot \frac{x_1 y_1}{z_1^3} = \frac{x_1 y_1}{z_1^2}$$

$$\boxed{\frac{x_1 y_1}{z_1^2} = \frac{x_1 y_1}{z_1^2}}$$

(Como queríamos demonstrar).

ou seja, $r_1 = r_2$

Consequentemente tem-se que:

$$(n^2 - n)Ln[r_1] = nLn[r_2]$$

Substituindo $n = 2$ e $r_1 = r_2$

Tem-se finalmente:

$$2Ln[r_1] = 2Ln[r_1] \text{ (Como queríamos demonstrar).}$$

Observação: aqui na parte real pode-se considerar o mesmo intervalo angular presente na solução heurística $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$, por se tratar da parte real do número complexo. Entretanto, na parte imaginária foi considerado $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ que é um intervalo maior, por se tratar do campo complexo integrado com a fórmula de Euler da análise complexa e também porque o ângulo $\theta = 2\pi$ será dividido por ele mesmo, e conseqüentemente em decorrência de tal fato, o ângulo θ pode assumir qualquer valor dentro do intervalo $[0, 2\pi]$.

É possível observar que, para $n = 2$, todas as igualdades que aparecem no trabalho são satisfeitas. Entretanto, para $n \geq 3$, pelo menos uma dessas igualdades falha. Conforme foi demonstrado, $n = n^2 - n$. Sabe-se que $x_1^n + y_1^n = z_1^n$. Porém, pode-se afirmar que $z_1^n = z_1^n$ e substituindo $n = n^2 - n$, tem-se que $z_1^{n^2-n} = z_1^n$, ou seja, $z_1^{n^2-n} - z_1^n = 0$. Fazendo uma pequena manipulação algébrica, foi possível demonstrar que:

$$z_1^{n^2-n} - z_1^n = z_1^n (z_1^{n^2-2n} - 1) = 0.$$

É interessante observar que só existe duas soluções possíveis para a equação:

$$z_1^n (z_1^{n^2-2n} - 1) = 0.$$

Essas soluções são $z_1 = 0$ que vem da igualdade $z_1^n = 0$ e $z_1 = 1$ que vem da igualdade $(z_1^{n^2-2n} - 1) = 0$.

Consideremos agora o sistema da solução heurística do Último Teorema de Fermat (Cruz; Silva; Júnior, 2023):

$$\begin{cases} x_1^n + y_1^n = z_1^n \\ (x - x_1^n)(x - y_1^n) = 0 \end{cases}$$

Nesse caso, para $n \geq 3$, só se aceita como solução para variável z_1 , os valores $z_1 = 0$ ou $z_1 = 1$

Para $z_1 = 0$, as soluções que poderiam ser aceitas para a equação $x_1^n + y_1^n = z_1^n$ seriam:

Solução-I

$(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ para n sendo um número natural par ou ímpar.

$$\begin{aligned} x_1^n + y_1^n &= z_1^n \\ (0)^n + (0)^n &= (0)^n \\ 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Solução-II

$(x_1, y_1, z_1) = (a, -a, 0)$ com $a \in \mathbb{Q}$ e n sendo um número natural ímpar.

$$\begin{aligned} x_1^n + y_1^n &= z_1^n \\ (a)^n + (-a)^n &= (0)^n \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo:

$(1/2, -1/2, 0)$ e $n = 3$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 &= (0)^3 \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{8} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Para $z_1 = 1$ as soluções que poderiam ser aceitas para a equação $x_1^n + y_1^n = z_1^n$ seriam:

Solução-I

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) &= (1, 0, 1) \\ x_1^n + y_1^n &= z_1^n \\ (1)^n + (0)^n &= (1)^n \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Solução-II

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1, z_1) &= (0, 1, 1) \\
x_1^n + y_1^n &= z_1^n \\
(0)^n + (1)^n &= (1)^n \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Observar-se que, pelo menos uma das três variáveis x_1, y_1 e z_1 , para $n \geq 3$, teria que deixar de existir, pois, obrigatoriamente, no mínimo, uma das três variáveis teria que assumir valor zero, fazendo com que a equação $x_1^n + y_1^n = z_1^n$ perdesse a característica de ser equação de Fermat.

3.3. Consequências de validade de “n” no campo complexo

Tomando como ponto de partida a análise complexa de tudo que foi analisado até o momento, foi possível demonstrar que:

$$\begin{aligned}
(2\pi i n^2 - 2\pi i n) \text{Ln}(e) &= 2\pi i n \text{Ln}(e) \\
2\pi n^2 - 2\pi n &= 2\pi n \\
2\pi [n^2 - n] &= 2\pi [n] \\
n^2 - n &= n \text{ ou } n = n^2 - n \\
n^2 - 2n &= 0 \\
n[n - 2] &= 0 \\
\mathbf{n} &= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabe-se que $(2\pi i n^2 - 2\pi i n) \text{Ln}(e) = 2\pi i n \text{Ln}(e)$ equivale a:

$$\text{Ln}(e)^{[2\pi i n^2 - 2\pi i n]} = \text{Ln}[e]^{2\pi i n} \text{ consequentemente temos: } (e)^{[2\pi i n^2 - 2\pi i n]} = [e]^{2\pi i n} = 1$$

Aqui temos de acordo com a história da matemática, de que Euler afirmou que conseguiu uma fórmula que mostrou que um número complexo pode ser igual a um número real. Entretanto, nesse ponto, é possível sair dessa igualdade de um número complexo igual a um número real para uma igualdade de um número real igual a um número real dividindo ambas as potências de cada lado por $2\pi i$ (sabemos que isso é matematicamente possível) e desta forma chegaremos a:

$$(e)^{[n^2 - n]} = [e]^n$$

Assim sendo, tem-se que um número real é igual a um número real e anteriormente tinha-se que um número complexo era igual a um número real. Logicamente que o único valor que preserva a igualdade $(e)^{[n^2 - n]} = [e]^n$ como verdadeira é $n = 2$. $(e)^{[n^2 - n]} = [e]^n$

implica que $n^2 - n = n$, em decorrência das bases da igualdade serem iguais. Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} n^2 - 2n &= 0 \\ n[n - 2] &= 0 \\ \mathbf{n} &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

Portanto, é possível mostra que:

$$(e)^2 = [e]^2 \text{ (verdade) para } n = 2.$$

$$(e)^2 = [e] \text{ (falso) para } n = 3.$$

•
•
•

De maneira geral temos que: $(e)^{[n^2-n]} = [e]^n$ é falso para $n \geq 3$.

Somente $n = 2$ comprova as igualdades de acordo os parâmetros estabelecidos no presente estudo e lembrando que estamos trabalhando com $n \geq 2$. Considerando uma análise mais geral conforme a solução heurística do Último Teorema de Fermat proposto por Cruz, Silva e Júnior (2023) e análise complexa, tem-se:

$Ln [r_1]^{n^2-n} + 2\pi i n^2 - 2\pi i n = Ln [r_2]^n + 2\pi i n$. Aqui é importante observar que $Ln [r_1]^{n^2-n} = Ln [r_2]^n$, pois para $n \geq 2$, teremos $[r_1]^{n^2-n} = [r_2]^n$. Mostrar isso é fácil, basta considerar as seguintes operações:

$$\begin{aligned} [r_1]^{n^2-n} &= [r_2]^n \\ \left[\frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right]^{n^2-n} &= \left(\frac{z_1}{2p^2} \right)^n \\ \text{sen}(\theta) \cos(\theta) &= 2 \cdot \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right)^n \end{aligned}$$

Nesse caso, isola-se $2p^2$ em $\frac{x_1}{p}, \frac{y_1}{pz_1} = 2 \cdot \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right)^n$, substituindo-o em $\left[\frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right]^{n^2-n} = \left(\frac{z_1}{2p^2} \right)^n$ e obtendo

$$[r_1]^{n^2-n} = [r_2]^n \text{ para } n \geq 2.$$

Como $[r_1]^{n^2-n} = [r_2]^n$ para $n \geq 2$, então:

$$\begin{aligned} Ln[r_1]^{n^2-n} - Ln[r_2]^n + [2\pi n^2 - 2\pi n]i &= [2\pi n]i \\ 0 + [2\pi n^2 - 2\pi n]i &= [2\pi n]i \\ [2\pi n^2 - 2\pi n]i &= [2\pi n]i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n^2 - n &= n \text{ ou } n = n^2 - n \\
n^2 - 2n &= 0 \\
n[n - 2] &= 0 \\
n &= 2
\end{aligned}$$

Assim, conseguiu-se chegar a uma situação em que apareceu uma equação que envolve somente a variável “ n ” do sistema da solução heurística e ao resolvê-la é possível achar o valor específico para “ n ” e esse valor é o $n = 2$. Esse valor ao ser substituído em todas as igualdades comprova que elas são verdadeiras. A equação em “ n ” surgiu exatamente do próprio sistema da solução heurística do Último Teorema de Fermat, como proposto por Cruz, Silva e Júnior (2023). Decorrente disso, foi possível chegar a outras novas descobertas de grande beleza matemática. Para $n \geq 3$, pelo menos uma das igualdades constará como falsa e conseqüentemente, será falso também para o sistema da solução heurística (Cruz; Silva; Júnior, 2023), como veremos abaixo:

$$x_1^n + y_1^n = z_1^n$$

Substituindo $n = n^2 - n$,

$$\text{tem-se: } x_1^n + y_1^n = z_1^{n^2-n} = (z_1^n)^{n-1} \text{ e}$$

substituindo $z_1^n = x_1^n + y_1^n$, tem-se: $(x_1^n + y_1^n) = ((x_1^n + y_1^n))^{n-1}$. O interessante é que essa igualdade somente é verdadeira para $n = 2$. Isso mostra a beleza matemática da integralidade entre a solução heurística do Último Teorema de Fermat, como proposto por Cruz, Silva e Júnior (2023), e a Fórmula de Euler da análise complexa.

Considerando todas as operações realizadas no presente artigo, pode-se afirmar matematicamente que a solução heurística como proposta por Cruz, Silva e Júnior (2023), está tão correta que, se isolarmos v_1 em $x_1 = 2v_1$ e $2p^2$ na equação $\frac{x_1}{p} \cdot \frac{y_1}{pz_1} = 2 \cdot \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2}\right)^n$ e substituir tudo isso na equação da solução heurística $x_1^n + y_1^n = (2p^2)^n \left(\frac{v_1 y_1}{p^2 z_1}\right)^{n-1}$, chegaremos exatamente na equação $x_1^n + y_1^n = z_1^n$. Isso comprova o quanto a base para essa nova visão no campo complexo é sólida e muito bem estruturada.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A relação integrativa entre o Último Teorema de Fermat e a Fórmula de Euler da análise complexa mostrou a validade para $n = 2$ em $x^n + y^n = z^n$, considerando uma solução heurística realizada durante as operações matemáticas.

A validade para $n = 2$ no campo complexo mostrou como o Último Teorema de Fermat pode ter desfechos surpreendentes de aplicação.

A solução heurística do Último Teorema de Fermat foi de fundamental importância para a demonstração de validade de $n = 2$ no campo complexo.

A interação entre o Último Teorema de Fermat e a Fórmula de Euler da análise complexa mostrou que é possível fazer interagir entidades matemáticas aparentemente antagônicas, obtendo assim, um quadro de grande beleza estética.

É preciso desenvolver novos estudos sobre possíveis interações do Último Teorema de Fermat com as diferentes áreas da matemática.

REFERÊNCIAS

Cleomacio Miguel da Silva; Sóstenes Rônmel da Cruz. Complexidade irreduzível da identidade de Euler. Origem em Revista, v.1, n. 1, 2018.

Crease, R.P. As grandes equações. As histórias das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que a criaram. Rio de Janeiro: Zahar; 2011, 276 p

Devlin, K. (2011). The Beauty of Mathematics: A Visual Guide to Mathematical Concepts and Ideas. Princeton University Press.

Stewart, I. (2013). Why Beauty Is Truth: The History of Symmetry. Basic Books.

Sóstenes Rônmel da Cruz; Cleomacio Miguel da Silva; Agrinaldo Jacinto do Nascimento Júnior. **A heuristic solution to Fermat's last theorem**. Revista Brasileira do Ensino Médio, v. 6, p. 1-10, 2023.

Zeitz, P. (2007). The Art and Craft of Problem Solving (2nd ed.). John Wiley & Sons.

Robert L. Page. **Number Theory, Elementary** In: in Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition), 2001, Copyright © 2001 Elsevier Science Ltd. Ramtech, Inc., Tarzana, California, USA.

Zill DG, Shanahan PD. Introdução à análise complexa. Com aplicações. 2rd ed. Rio de Janeiro: LTC; 2009, 377 p.

Este artigo foi publicado na Revista Portuguesa Cuadernos de Educación y Desarrollo.

DOI: 10.55905/cuadv16n1-039

Autor: Sóstenes Rônmel da Cruz (professor do IF-SERTÃO campus Petrolina).

Coautor: Cleomacio Miguel da Silva (professor da UPE).