

Uma solução heurística para o último teorema de Fermat

Resumo

Durante séculos, notáveis matemáticos se debruçaram para provar ou refutar o último teorema de Fermat. Decorrente disso, foram geradas muitas provas matemáticas para diferentes valores de n . O matemático inglês Andrew Wiles, após várias tentativas, e com a ajuda de seu ex-aluno Richard Taylor, finalmente, apresentou uma prova do último teorema de Fermat, que foi publicado em 1995 no prestigiado periódico *Annals of Mathematics*. Pelo fato de ter se passado séculos sem uma prova do teorema, muitos matemáticos suspeitaram de que Fermat não desenvolveu uma prova real. A demonstração apresentada por Andrew Wiles envolveu operações matemáticas bastantes complexas que não existiam na época de Fermat. Devido à elevada complexidade da demonstração do último teorema de Fermat, é altamente desafiador tentar encontrar soluções onde ele seja matematicamente válido. Sendo assim, e dentro desse contexto, o presente trabalho teve como objetivo apresentar uma solução heurística do último teorema de Fermat usando um método algébrico especificamente desenvolvido. A finalidade não foi, em hipótese alguma, propor uma demonstração do teorema, mas, realizar operações matemáticas que visaram facilitar a sua compreensão, e consequentemente, sua aplicação. Os resultados obtidos mostraram que foi possível obter soluções válidas. Isso serve como elemento motivador para o ensino de matemática na graduação e até no ensino médio.

1. Introdução

O último teorema de Fermat é um teorema proposto pela primeira vez por Fermat na forma de uma nota rabiscada na margem de sua cópia do antigo texto grego *Arithmetica* de Diofanto. A nota rabiscada foi descoberta postumamente, e o original está perdido. No entanto, uma cópia foi preservada em um livro publicado pelo filho de Fermat (NAGELL, 1951). Na nota, Fermat afirmou ter descoberto uma prova de que a equação diofantina $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções inteiras para $n > 2$ para x, y e z diferentes de zero. O texto completo da declaração de Fermat diz que: “É impossível que um cubo seja a soma de dois cubos; uma quarta potência seja a soma de duas quartas potências; ou em geral, para qualquer número que seja uma potência maior que o segundo seja a soma de dois como poderes. Descobri uma demonstração verdadeiramente maravilhosa desta proposição que esta margem é muito estreita para conter.” (NAGELL, 1951).

Como resultado da nota marginal de Fermat, a proposição de que a equação diofantina $x^n + y^n = z^n$; onde: x, y, z e n são inteiros, não tem soluções diferentes de zero para $n > 2$, ficou conhecida como último teorema de Fermat. Foi chamado de “teorema” com base na afirmação de Fermat, apesar do fato de que nenhum outro matemático foi capaz de prová-lo por centenas de anos (STEWART; TALL, 2000). Pode-se observar que a restrição $n > 2$ é obviamente necessária, pois, existem várias fórmulas elementares para gerar um número infinito de triplas pitagóricas (x, y, z) que satisfazem a equação para $n = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$.

Durante séculos, muitos matemáticos de renome tentaram provar o último teorema de Fermat, porém, não obtiveram sucesso. Entretanto, em 1995, Andrew Wiles com a ajuda de Richard Taylor, apresentaram uma prova definitiva para o emblemático teorema. A prova do último teorema de Fermat marca o fim de uma era matemática. Uma vez que praticamente todas as ferramentas que eventualmente foram utilizadas para resolver o problema ainda não haviam sido inventadas na época de Fermat, é interessante especular se ele realmente possuía uma prova elementar do teorema. A julgar pela tenacidade com que o problema resistiu ao ataque por tanto tempo, a suposta prova de Fermat parece ter sido ilusória. Esta conclusão é ainda apoiada pelo fato de Fermat ter procurado provas para os casos $n = 4$ e $n = 5$, o que teria sido supérfluo se ele realmente estivesse de posse de uma prova geral (RIBENBOIM, 1999).

A demonstração apresentada por Andrew Wiles envolveu operações matemáticas bastantes complexas e muito acima do nível do ensino de graduação em matemática. Porém, isso não impede que o último teorema de Fermat possa ser usado em aplicações mais simples dentro do contexto da matemática básica. Assim, utilizando-se de operações elementares, a beleza matemática desse teorema pode ser estudada através do desenvolvimento de um método heurístico de interação entre a álgebra, aritmética e geometria; inclusive, no ensino médio, como um recurso estimulador dentro do processo ensino-aprendizagem.

O método heurístico tem sido um recurso bastante promissor na resolução de problemas matemáticos em diferentes níveis de aprendizagem. O cerne da resolução de problemas matemáticos é explorar e estabelecer relações entre os diferentes ramos do conhecimento da matemática. Abordagens heurísticas são capazes de ilustrar como esses ramos do conhecimento são unidos por alguns princípios básicos e universais durante a transferência de conhecimento matemático no processo de resolução de problemas (HOON; KEE; SINGH, 2013). Assim, usar o método heurístico para estudar o último teorema de Fermat, abre caminhos promissores para entender sua aplicação na matemática básica. Seria muito importante para o processo ensino-aprendizagem a integração entre os entes: método heurístico, último teorema de Fermat e resolução de problemas.

De todas as disciplinas escolares, a matemática introduz e desenvolve o conceito de “resolução de problemas”, como componente fundamental da aprendizagem escolar com forte efeito formativo nos alunos. Em matemática, a resolução de problemas representa o conceito mais eficaz para a contextualização e recontextualização de conceitos, para a transferência de conhecimentos matemáticos operacionais e básicos para garantir uma aprendizagem sustentável e significativa. A conduta resolutiva do aluno também envolve, além dos fatores cognitivos, fatores que visam a afetividade e a vivência do aluno (CÄPRIOARÄ, 2015).

Portanto, o objetivo do presente estudo foi apresentar uma solução heurística do último teorema de Fermat usando operações básicas da matemática elementar. Ressaltamos que, a finalidade não foi fazer uma demonstração do teorema, mas, criar uma abordagem como recurso de aprendizagem dentro de uma temática que foi discutida por séculos.

2. Metodologia

O método heurístico é uma alternativa viável para se estudar o último teorema de Fermat através de operações matemáticas simples de álgebra, aritmética e geometria. Sendo assim, houve a necessidade de primeiramente começar com uma abordagem sobre os conjuntos numéricos até chegar à demonstração final. A metodologia foi dividida em 3 (três) importantes etapas para facilitar o entendimento da demonstração.

O último teorema de Fermat, também chamado de grande teorema de Fermat, tem a afirmação de que não existem números naturais x , y e z , tais que $x^n + y^n = z^n$, em que n é um natural número maior que 2. Por exemplo, se $n = 3$, o último teorema de Fermat afirma que não existem números naturais x , y e z tais que $x^3 + y^3 = z^3$. Ou seja, a soma de dois cubos não é um cubo.

1ª Etapa. Escrevendo x , y e z como a razão de dois números

O último teorema de Fermat diz que $x^n + y^n = z^n$ não tem solução para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$ com x, y e $z \in \mathbb{Z}$ ou x, y e $z \in \mathbb{Q}$, pois, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Nesse trabalho considerou-se x, y e $z \in \mathbb{Q}$. Portanto, podemos escrever x , y e z com a razão de dois números:

$$x = \frac{a_1}{b_1} \in \mathbb{Q} \text{ com } a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$$

$$y = \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q} \text{ com } a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$$

$$z = \frac{a_3}{b_3} \in \mathbb{Q} \text{ com } a_3, b_3 \in \mathbb{Q}$$

2ª Etapa. Proposta heurística.

Heuristicamente, no presente trabalho foi considerado que: $x_1^n + y_1^n = z_1^n \rightarrow$ com $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$, x_1, y_1 e $z_1 \in \mathbb{Q}$.

$\mathbb{N} \rightarrow$ Conjunto dos números naturais.

$\mathbb{Z} \rightarrow$ Conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{Q} \rightarrow$ Conjunto dos números racionais.

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \rightarrow$ todo inteiro é racional.

$$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$$

$$(z_1^n)^2 = (z_1^2)^n \rightarrow \text{Uma das propriedades da potência.}$$

3ª Etapa. Hipótese de estudo.

Para dar prosseguimento à proposta heurística e analisando a sua viabilidade, considerou-se os seguintes sistemas:

$$(I) \quad x_1^n + y_1^n = z_1^n$$

$$(II) \quad (x - x_1^n) \cdot (x - y_1^n) = 0$$

Com x_1, y_1 e $z_1 \in \mathbb{Q}$; $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$.

3. Resultados e Discussão

Considerando a 1ª Etapa da metodologia, para $x^n + y^n = z^n$, temos:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^n = \left(\frac{a_3}{b_3}\right)^n \text{ não tem solução para } n \geq 3, \text{ pois, } \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^n = \frac{(a_3)^n}{(b_3)^n} \\ \rightarrow \frac{(a_1 b_2 b_3)^n + (a_2 b_1 b_3)^n}{(b_1 b_2 b_3)^n} = \frac{(a_3 b_1 b_2)^n}{(b_1 b_2 b_3)^n} \therefore (a_1 b_2 b_3)^n + (a_2 b_1 b_3)^n = (a_3 b_1 b_2)^n, \text{ com}$$

$(a_1 b_2 b_3); (a_2 b_1 b_3) \text{ e } (a_3 b_1 b_2) \in \mathbb{Q}$. Da análise matemática sabemos que: Seja $v_1 \in \mathbb{R}$, $v_2 \in \mathbb{R}$ então: $0 < \frac{(v_1^n - v_2^n)^2}{(v_1^n + v_2^n)^2} < 1$ com $n \in \mathbb{N}; n \geq 3$ e $(v_1^n - v_2^n)^2 < (v_1^n + v_2^n)^2$. Considerando as Etapas 2ª e 3ª simultaneamente, teremos:

$$(I) \quad \frac{x_1^n + y_1^n}{z_1^n} = 1$$

$$(II) \quad x^2 - (x_1^n + y_1^n)x + (x_1 y_1)^n = 0$$

$$\frac{x^2}{z_1^n} - \left(\frac{x_1^n + y_1^n}{z_1^n}\right)x + \left(\frac{x_1 y_1}{z_1}\right)^n = 0$$

$$\frac{x^2}{z_1^n} - 1x + \left(\frac{x_1 y_1}{z_1}\right)^n = 0$$

Mas, $\Delta = (b)^2 - 4(a) \cdot (c)$, então:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \left(\frac{1}{z_1^n} \right) \left(\frac{x_1 y_1}{z_1} \right)^n = 1 - 4 \left(\frac{1}{z_1^n} \right) \left(\frac{x_1 y_1}{z_1} \right)^n$$

$$\Delta = 1 - 4 \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right)^n$$

Substituindo $z_1 = (x_1^n + y_1^n)^{\frac{1}{n}}$ em Δ , temos:

$$\Delta = 1 - 4 \left\{ \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right\}^n = 1 - 4 \left(\frac{x_1 y_1}{(x_1^n + y_1^n)^{\frac{2}{n}}} \right)^n$$

$$\Delta = 1 - 4 \left\{ \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right\}^n = 1 - \frac{4(x_1 y_1)^n}{(x_1^n + y_1^n)^2}$$

$$\Delta = 1 - 4 \left\{ \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right\}^n = \frac{(x_1^n + y_1^n)^2 - 4(x_1 y_1)^n}{(x_1^n + y_1^n)^2}$$

$$\Delta = 1 - 4 \left\{ \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right\}^n = \frac{x_1^{2n} + 2(x_1 y_1)^n + y_1^{2n} - 4(x_1 y_1)^n}{(x_1^n + y_1^n)^2}$$

$$\Delta = 1 - 4 \left\{ \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right\}^n = \frac{x_1^{2n} - 2(x_1 y_1)^n + y_1^{2n}}{(x_1^n + y_1^n)^2}$$

$$\Delta = 1 - 4 \left\{ \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right\}^n = \frac{(x_1^n - y_1^n)^2}{(x_1^n + y_1^n)^2}$$

Observemos que:

(A) $0 < \frac{(x_1^n - y_1^n)^2}{(x_1^n + y_1^n)^2} < 1$ para $x_1 \neq y_1$ com $\frac{(x_1^n - y_1^n)^2}{(x_1^n + y_1^n)^2} \in \mathbb{Q}$ e $(x_1^n - y_1^n)^2 < (x_1^n + y_1^n)^2$.

(B) $\frac{(x_1^n - y_1^n)^2}{(x_1^n + y_1^n)^2}$ é quadrado perfeito.

Sabe-se que: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \forall \theta \in]0, 2\pi[$.

Substituindo $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ em Δ , temos:

$$\Delta = \sin^2 \theta - 4 \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right)^n + \cos^2 \theta = \left(\frac{x_1^n - y_1^n}{x_1^n + y_1^n} \right)^2$$

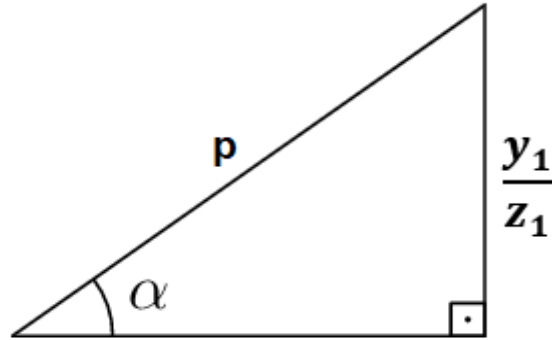
Qual a condição para que $\sin^2 \theta - 4 \left\{ \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right\}^n + \cos^2 \theta \in \mathbb{Q}$, seja um quadrado perfeito?

Uma das condições necessárias é que:

$$-4 \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right)^n = -2 \cos \theta \sin \theta \text{ ou } 2 \left\{ \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right\}^n = \cos \theta \sin \theta.$$

Com: $0 < 2 \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right)^n < 1$ e $\sin \theta \in \mathbb{Q}$ e $\cos \theta \in \mathbb{Q}$, teremos:

$\text{sen}^2\theta - 4 \left\{ \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right\}^n + \cos^2\theta = \text{sen}^2\theta - 2 \cos\theta \text{sen}\theta + \cos^2\theta = \{\text{sen}\theta - \cos\theta\}^2$ com Δ sendo um quadrado perfeito. Tomando a análise da igualdade: $2 \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right)^n = (\cos\theta \text{sen}\theta)$, e como dito anteriormente que, $\forall \theta \in] 0, 2\pi [$, então, é possível escolher um valor para θ . Para tanto, consideremos a relação no triângulo retângulo abaixo.



$$(p)^2 = (x_1)^2 + \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^2$$

Observemos que:

$$p^2 \in \mathbb{Q}.$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{\left(\frac{y_1}{z_1}\right)}{p} = \frac{y_1}{p z_1} \Rightarrow \frac{y_1}{z_1} = p \text{sen}\alpha \Rightarrow y_1 = p z_1 \text{sen}\alpha$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{x_1}{p} \Rightarrow x_1 = p \cos\alpha$$

Escolhendo $\theta = \alpha$ com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então:

$$\omega = 2 \left(\frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right)^n = 2 \left(\frac{y_1}{z_1} \cdot x_1 \cdot \frac{1}{z_1} \right)^n = \frac{2 \cdot (1)^n}{z_1^n} \cdot \left(\frac{y_1}{z_1} \cdot x_1 \right)^n = \cos\theta \text{sen}\theta$$

Substituindo $y_1 = p z_1 \text{sen}\theta$ e $x_1 = p \cos\alpha$ em ω , tem-se:

$$\omega = \frac{2}{z_1^n} \left(\frac{p z_1 \text{sen}(\theta)}{z_1} \cdot p \right)^n = \cos\theta \text{sen}\theta$$

$$\omega = \frac{2}{z_1^n} \{p^2 \text{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta)\}^n = \cos\theta \text{sen}\theta$$

$$\omega = \frac{2\{p^2\}^n}{z_1^n} \cdot \{\text{sen}(\theta) \cos(\theta)\}^n = \cos\theta \text{sen}\theta$$

$$2\{p^2\}^n \cdot (\cos\theta \text{sen}\theta)^n = (\cos\theta \text{sen}\theta) \cdot z_1^n$$

$$\frac{z_1^n}{(p^2)^n} = \frac{2\{\text{sen}(\theta) \cos(\theta)\}^n}{\{\text{sen}(\theta) \cos(\theta)\}}$$

$$\frac{z_1^n}{(p^2)^n} = 2 (\text{sen}\theta \cos\theta)^{n-1}$$

Substituindo $\text{sen}\theta = \frac{y_1}{p z_1}$ e $\text{cos}\theta = \frac{x_1}{p}$, temos:

$$\frac{z_1^n}{(p^2)^n} = 2 \left(\frac{y_1}{p z_1} \cdot \frac{x_1}{p} \right)^{n-1}$$

$$\frac{z_1^n}{(p^2)^n} = 2 \left(\frac{x_1 y_1}{p^2 z_1} \right)^{n-1}$$

Considerando $x_1 = 2 v_1$ com $v_1 \in \mathbb{Q}$ e substituindo $x_1^n + y_1^n = z_1^n$, então, teremos:

$$\frac{x_1^n + y_1^n}{(p^2)^n} = 2 \left(\frac{2(v_1 y_1)}{p^2 z_1} \right)^{n-1}$$

$$\frac{(x_1)^n}{(p^2)^n} + \frac{(y_1)^n}{(p^2)^n} = 2 \cdot 2^{n-1} \left(\frac{v_1 y_1}{p^2 z_1} \right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{x_1}{p^2} \right)^n + \left(\frac{y_1}{p^2} \right)^n = (2)^n \left(\frac{v_1 y_1}{p^2 z_1} \right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{x_1}{2p^2} \right)^n + \left(\frac{y_1}{2p^2} \right)^n = \left(\frac{v_1 y_1}{p^2 z_1} \right)^{n-1}$$

Considerando que:

$$\frac{x_1}{2p^2} = q_1, \frac{y_1}{2p^2} = q_2 \text{ e } \frac{v_1 y_1}{p^2 z_1} = q_3$$

Então, $(q_1)^n + (q_2)^n = (q_3)^{n-1}$, com $n \geq 3$ e q_1, q_2 e $q_3 \in \mathbb{Q}$.

Baseado no que foi demonstrado até agora, pode-se fazer as seguintes observações:

(I) Se $(q_1)^n + (q_2)^n = (q_3)^{n-1}$, então, $(q_1)^n + (q_2)^n$ não pode ser escrito na forma $(q_1)^n + (q_2)^n = (q_3)^n$ com q_1, q_2 e $q_3 \in \mathbb{Q}$; com $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$.

(II) Se $(q_1)^n + (q_2)^n$ não pode ser escrito na forma $(q_1)^n + (q_2)^n = (q_3)^n$, então não é válido que $x_1^n + y_1^n = z_1^n$ (com x_1, y_1 e $z_1 \in \mathbb{Q}$, com $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$) conforme os parâmetros estabelecidos anteriormente nesse trabalho.

(III) Se existem q_1, q_2 e q_3 com q_1, q_2 e $q_3 \in \mathbb{Q}$ tal que $(q_1)^n + (q_2)^n = (q_3)^{n-1}$, então:

$(q_1)^n + (q_2)^n = (q_3)^{n-1} \Rightarrow (x_1)^n + (y_1)^n = (z_1)^{n-1}$, com $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, para $n = 3 \Rightarrow (q_1)^3 + (q_2)^3 = (q_3)^2 \Rightarrow (x_1)^3 + (y_1)^3 = (z_1)^2$.

Para $n = 4 \Rightarrow (q_1)^4 + (q_2)^4 = (q_3)^3 \Rightarrow (x_1)^4 + (y_1)^4 = (z_1)^3$.

$$\text{Para } n = 5 \Rightarrow (q_1)^5 + (q_2)^5 = (q_3)^4 \Rightarrow (x_1)^5 + (y_1)^5 = (z_1)^4.$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{Para } n = n \Rightarrow (q_1)^n + (q_2)^n = (q_3)^{n-1} \Rightarrow (x_1)^n + (y_1)^n = (z_1)^{n-1}.$$

Para dar maior esclarecimento, consideremos o seguinte exemplo numérico:

$$\left(\frac{1}{25}\right)^3 + \left(\frac{2}{25}\right)^3 = \left(\frac{15}{625}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{5^2}\right)^3 + \left(\frac{2}{5^2}\right)^3 = \left(\frac{3.5}{5^4}\right)^2$$

$$\frac{1}{5^6} + \frac{8}{5^6} = \frac{9}{5^6} \quad \text{ou} \quad \frac{1^3}{5^6} + \frac{2^3}{5^6} = \frac{3^2}{5^6} \Rightarrow (1)^3 + (2)^3 = (3)^2$$

No contexto analisado no presente trabalho para a obtenção de uma demonstração heurística do último teorema de Fermat, foi possível comprovar as hipóteses consideradas e testá-las conforme procedimentos abaixo.

$$I \rightarrow \text{Vimos que } \left(\frac{x_1}{2p^2}\right)^n + \left(\frac{y_1}{2p^2}\right)^n = \left(\frac{v_1 y_1}{p^2 z_1}\right)^{n-1}$$

Supondo que:

$$x_1 = 2p^2 a_1 \quad \text{com } a_1 \in \mathbb{Q} \text{ e } p^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_1 \in \mathbb{Q}.$$

$$y_1 = 2p^2 b_1 \quad \text{com } b_1 \in \mathbb{Q} \text{ e } p^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow y_1 \in \mathbb{Q}.$$

$$v_1 = \frac{c_1 p^2 z_1}{y_1} \quad \text{com } c_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Q} \text{ e } p^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow v_1 \in \mathbb{Q}.$$

Então substituindo em I:

$$\left(\frac{2p^2 a_1}{2p^2}\right)^n + \left(\frac{2p^2 b_1}{2p^2}\right)^n = \left(\frac{\frac{c_1}{y_1} \cdot p^2 z_1 \cdot y_1}{p^2 z_1}\right)^{n-1}$$

$(a_1)^n + (b_1)^n = (c_1)^{n-1}$ ao considerar os parâmetros estabelecidos no trabalho, com a_1, b_1 e $c_1 \in \mathbb{Q}$ e $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo:

$$\left(\frac{1}{5^2}\right)^3 + \left(\frac{2}{5^2}\right)^3 = \left(\frac{3}{5^3}\right)^2 \Rightarrow \frac{(1)^3}{(5)^6} + \frac{(2)^3}{(5)^6} = \frac{(3)^2}{(5)^6} \Rightarrow (1)^3 + (2)^3 = (3)^2$$

Interessante que para n igual a dois o sistema:

$$(I) \quad x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$$

(II) $(x - x_1^2)(x - y_1^2) = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1^2 + y_1^2)x + (x_1 y_1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - (z_1^2)x + (x_1 y_1)^2 = 0$,
terão soluções x, x_1, y_1, z_1 que satisfazem às duas equações do sistema com x_1, y_1, z_1 pertencentes a \mathbb{Q} .

Exemplo:

O trio pitagórico $x_1 = 3, y_1 = 4, z_1 = 5$ e $x = 9$ ou $x_1 = 3, y_1 = 4, z_1 = 5$ e $x = 16$ são valores que satisfazem às duas equações do sistema. Para n igual a um $x_1 = 2, y_1 = 7, z_1 = 9$ e $x = 2$ ou $x_1 = 2, y_1 = 7, z_1 = 9$ e $x = 7$ são valores que satisfazem a duas equações do sistema abaixo:

$$(I) \quad x_1 + y_1 = z_1$$

$$(II) (x - x_1)(x - y_1) = 0$$

Porém, se n for maior ou igual a três então não será possível existir x_1, y_1 e z_1 pertencentes a \mathbb{Q} que satisfaçam às duas equações do sistema, ou seja, o sistema para $n \geq 3$ terá que ser da forma:

$$(I) \quad x_1^n + y_1^n = (z_1)^{n-1}$$

$$(II) (x - x_1^n)(x - y_1^n) = 0$$

Observemos que, $x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 3$ e $x = 8$ ou $x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 3$ e $x = 1$ são valores que satisfazem às duas equações do sistema para $n = 3$.

Observemos que, $\sin^2 \theta - 4 \left\{ \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right\}^n + \cos^2(\theta) = \frac{(x_1^n - y_1^n)^2}{(x_1^n + y_1^n)^2}$ implica que:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{(x_1^n - y_1^n)^2}{(x_1^n + y_1^n)^2} + 4 \left\{ \frac{x_1 y_1}{z_1^2} \right\}^n$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{(x_1^n - y_1^n)^2}{(x_1^n + y_1^n)^2} + 4 \frac{(x_1 y_1)^n}{(z_1^2)^n} - \frac{(x_1^n - y_1^n)^2}{(x_1^n + y_1^n)^2} + 4 \frac{(x_1 y_1)^n}{(x_1^n + y_1^n)^2} \frac{(x_1^n + y_1^n)^2}{(x_1^n + y_1^n)^2} = 1. \text{ Isso mostra que as}$$

hipóteses heurísticas são verdadeiras para a demonstração apresentada.

4. Considerações Finais

Apesar da demonstração do último teorema de Fermat envolver operações matemáticas bastantes complexas, o presente trabalho apresentou uma solução heurística viável para aplicação simples.

A obtenção de $(q_1)^n + (q_2)^n = (q_3)^{n-1}$ através de operações básicas da matemática mostrou a possibilidade de se estudar o último teorema de Fermat de maneira mais simplificada, porém, não simplória.

O método matemático heurístico mostrou-se uma ferramenta eficiente para se encontrar uma solução simples para o último teorema de Fermat.

Referências

T. Nagell, Introduction to Number Theory, John Wiley, New York, 1951.

Ribenboim, P. Fermat's Last Theorem for Amateurs, New York: Springer-Verlag, 1999.

Stewart, I. and Tall, D. Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem, 3rd ed., Wellesley, MA: A K Peters, 2000.

Teoh Sian Hoona; Kor Liew Kee; Parmjit Singh. Learning Mathematics Using Heuristic Approach. Procedia - Social and Behavioral Sciences 90 (2013) 862 – 869.

Căprioară, D. Problem solving-purpose and means of learning mathematics in school. Procedia-Social and Behavioral Sciences, v. 191, p. 1859-1864, 2015.

Este artigo foi publicado na RBRAEM (Revista Brasileira do Ensino Médio).

Revista Brasileira do Ensino Médio (2023) | vol. 6 | 1-10

doi: 10.5281/zenodo.7702972

Autor: Sóstenes Rônmel da Cruz (professor do IF-SERTÃO campus Petrolina).

Coautores: Cleomacio Miguel da Silva; Agrinaldo Jacinto do Nascimento Júnior.