**Gustavo Luiz Rosseto de Matos**

FÓRMULA DO PONTO SIMÉTRICO EM RELAÇÃO À RETA

**Farroupilha–RS**

**2021**

Fórmula do Ponto Simétrico em relação à Reta

Symmetrical Point Formula in relation to Straight

Gustavo Luiz Rosseto de Matos

**Resumo**

O sistema de coordenadas cartesianas é empregado na matemática quando se trata de geometria analítica com o objetivo de representar equações por meio de formas matemáticas como, por exemplo, pontos, retas, curvas, figuras, entre outros. Em resumo, pode-se dizer que a geometria analítica é uma correspondência entre as equações algébricas e as formas geométricas ou, até mesmo, onde a álgebra se une à geometria em um mesmo estudo. Além do mais, este campo da matemática engloba diversos conceitos a respeito do posicionamento e relações que existem entre pontos e retas no plano cartesiano e, também, as condições que se devem obedecer. Diante disso, este artigo tem por finalidade apresentar o desenvolvimento das fórmulas capazes de obter os valores das coordenadas de um ponto simétrico em relação à uma reta qualquer a partir de seu ponto de origem. Por meio de alguns conceitos básicos de geometria analítica, tornou-se possível chegar a uma conclusão que simplifica a maneira de atingir tal resultado.

**Palavras-chave:** Fórmula; geometria analítica; matemática; ponto simétrico; reta.

**Abstract**

The Cartesian coordinate system is employed in mathematics when it comes to analytical geometry with the objective of representing equations through mathematical forms such as points, lines, curves, figures, among others. In summary, it can be said that analytical geometry is a correspondence between algebraic equations and geometric shapes or even where algebra joins geometry in the same study. Moreover, this field of mathematics encompasses several concepts regarding the positioning and relationships that exist between points and straights in the Cartesian plane and also the conditions that must be obeyed. Therefore, this article aims to present the development of formulas capable of obtaining the coordinate values of a symmetrical point in relation to any straight line from its point of origin. Through some basic concepts of analytical geometry, it has become possible to reach a conclusion that simplifies the way to achieve such a result.

**Keywords:**Formula; analytical geometry; mathematics; symmetrical point; straight.

**Sumário**

[1 INTRODUÇÃO 3](#_Toc91509295)

[2 GEOMETRIA ANALÍTICA 4](#_Toc91509296)

[2.1 Plano Cartesiano 4](#_Toc91509297)

[2.2 Ponto 5](#_Toc91509298)

[2.3 Equações da Reta 6](#_Toc91509299)

[3 CONCEITOS INICIAIS 7](#_Toc91509300)

[3.1 Perpendicularismo de Retas 7](#_Toc91509301)

[3.2 Ponto de Intersecção entre Retas 7](#_Toc91509302)

[3.3 Ponto Médio 7](#_Toc91509303)

[4 PONTO SIMÉTRICO EM RELAÇÃO À RETA 8](#_Toc91509304)

[4.1 Encontrando a equação da reta s perpendicular à r 8](#_Toc91509305)

[4.2 Determinando as coordenadas do ponto de intersecção 9](#_Toc91509306)

[4.3 Aplicando o conceito de ponto médio 10](#_Toc91509307)

[4.4 Determinando as fórmulas das coordenadas do Ponto Simétrico 11](#_Toc91509308)

[4.5 Fórmulas em função dos coeficientes angular e linear 13](#_Toc91509309)

[5 ANÁLISES DE CASOS ESPECÍFICOS 15](#_Toc91509310)

[5.1 Coeficiente angular igual a +1 15](#_Toc91509311)

[5.2 Coeficiente angular igual a -1 16](#_Toc91509312)

[6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 17](#_Toc91509313)

[REFERÊNCIAS 18](#_Toc91509314)

# INTRODUÇÃO

Sabe-se que a matemática, apesar de não ter uma definição exata sobre seu conceito, é a ciência que estuda os números, medidas, quantidades, medidas, figuras geométricas e outros através do raciocínio lógico. Por conta disso, é uma das ciências mãos aplicáveis no cotidiano das pessoas empregando desde suas operações básicas até as mais complexas.

Por se tratar de uma disciplina muito ampla, a matemática é dividida em diversas ramificações como forma de facilitar seu estudo como, por exemplo, aritmética, álgebra, geometria, trigonometria, estatística entre outras. Ainda assim, estes diversos ramos da matemática podem ser subdivididos em outras áreas como é o caso da geometria a qual pode ser separada em geometria plana, geometria analítica e geometria espacial.

A geometria analítica tem suas origens no século XVII com os franceses René Descartes (1596- 1650) e Pierre de Fermat (1607- 1665). Este campo da matemática surge com a ideia de unir álgebra e geometria. Em outras palavras, tem como objetivo representar num plano coordenado retas, curvas, círculos e outras formas geométricas partindo do conceito de que todas as figuras nada mais são que um conjunto de pontos.

Através de um estudo sobre os conceitos da geometria analítica e suas regras, este artigo apresenta uma maneira de calcular as coordenadas de um ponto simétrico em relação à uma reta por meio de uma fórmula matemática. Com a referida fórmula, é possível chegar exatamente nos valores de tais coordenadas apenas com os dados necessários.

Para apresentar a dedução da fórmula, o presente trabalho foi dividido em três partes: a primeira parte faz uma breve apresentação de alguns conceitos básicos da geometria analítica para tornar o estudo mais didático; a segunda parte, ainda com de caráter conceitual, mostra as condições e principais regras que foram empregadas para atingir o resultado; por fim, a última parte apresenta a dedução da fórmula propriamente dita até sua forma final e sua variação. Além do mais, após isso é realizado um estudo através de um caso específico como forma de facilitar os cálculos desse tipo de situação.

# GEOMETRIA ANALÍTICA

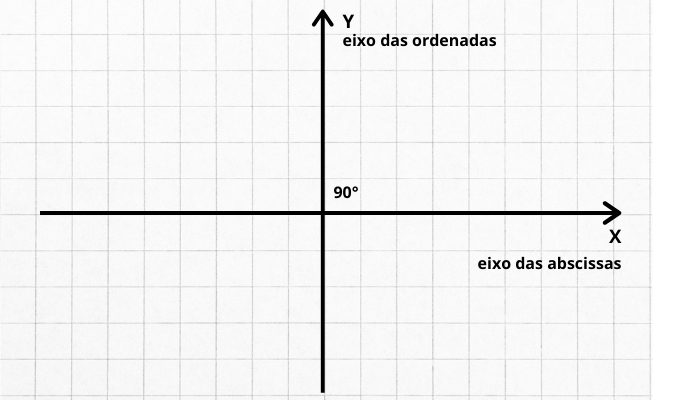
Antes de iniciar a explicação da fórmula, é interessante relembrar alguns elementos e conceitos iniciais da geometria analítica.

## Plano Cartesiano

O plano coordenado, mais conhecido como Plano Cartesiano, ou também plano ortogonal, é formado por dois eixos perpendiculares, ou seja, que formam um ângulo de 90° (ângulo reto) entre si. O eixo horizontal **x** é chamado eixo das abscissas e o eixo vertical **y** é chamado eixo das ordenadas.

Veja alguns dos elementos do Plano Cartesiano na figura 1 abaixo:

**Figura 1:** Elementos do Plano Cartesiano



**Fonte:** www.significados.com.br

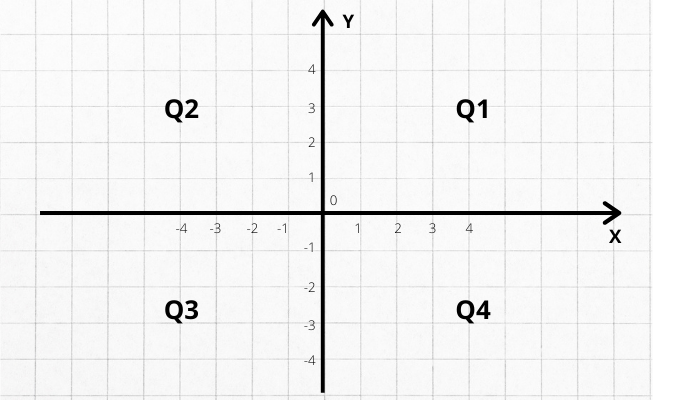
Além disso, esses dois eixos se coincidem em um ponto comum denominado ponto origem o qual possui coordenadas (0,0). Como consequência, dividem o sistema e quatro segmentos que recebem o nome de quadrantes.

O eixo das abscissas (eixo **x**) é da ordem crescente da esquerda para direita, isto é, aumenta seus valores numéricos nesse sentido. Por isso, possui valores positivos à direita do ponto origem e valores negativos à esquerda do ponto origem.

O eixo das ordenadas (eixo **y**) é da ordem crescente de baixo para cima, isto é, aumenta seus valores nesse sentido. Por isso, possui valores positivos acima do ponto origem e valores negativos abaixo do ponto origem.

Veja as disposições dos quadrantes do Plano Cartesiano bem como as escalas numéricas dos eixos na figura 2 abaixo:

**Figura 2:** Quadrantes do Plano Cartesiano



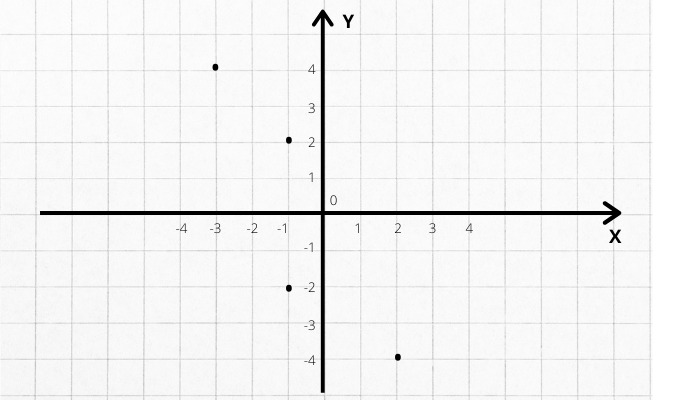
**Fonte:** www.significados.com.br

Dessa maneira, um ponto qualquer é representado neste plano por dois valores numéricos, sendo que o primeiro representa a coordenada **x** e o segundo a coordenada **y**. À esta combinação, dá-se o nome de par ordenado, ou ainda coordenada cartesiana, e representa um ponto no plano da forma P (x, y).

## Ponto

O ponto é representado no sistema de coordenadas cartesianas por meio de um par ordenado da forma (x, y). Veja alguns exemplos de pontos na figura 3 abaixo:

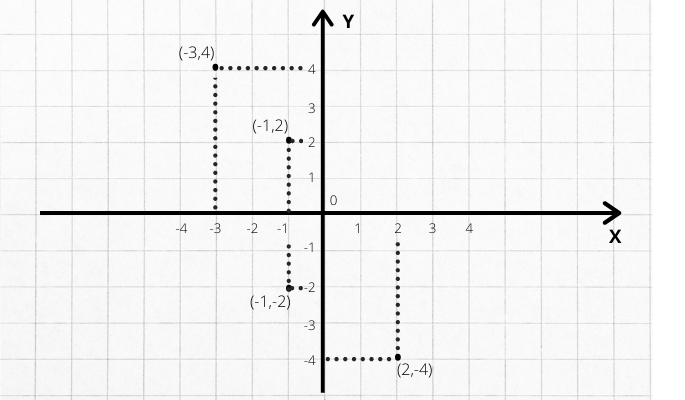
**Figura 3:** Ponto no Plano Cartesiano



**Fonte:** www.significados.com.br

Deste modo, para determinar a coordenada destes pontos basta relacionar sua localização com o valor correspondente em cada um dos eixos. Neste caso, o exemplo acima teria as seguintes soluções representadas na figura 4 a seguir:

**Figura 4:** Coordenadas dos pontos no Plano Cartesiano



**Fonte:** www.significados.com.br

## Equações da Reta

Segundo Iezzi (1977): “a toda reta **r** do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma **ax + by + c = 0** onde **a**, **b**, **c** são números reais, a ≠ 0 ou b ≠ 0, **(x, y)** representa um ponto genérico de **r**”.

Logo, a equação geral de uma reta qualquer é da seguinte forma:

A equação da reta também pode ser escrita em sua forma reduzida. Assim, a partir da equação geral com b≠0, tem-se que:

Isolando a varável **y**, tem-se:

Adotando e , chega-se à relação:

À **m** dá-se o nome de coeficiente angular e à **n** dá-se o nome de coeficiente linear.

# CONCEITOS INICIAIS

## Perpendicularismo de Retas

De acordo com Iezzi (1977): “duas retas **r** e **s**, não verticais, são perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é -1”

## Ponto de Intersecção entre Retas

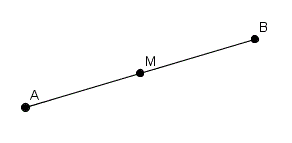
Conforme Iezzi (1977): “Todo ponto de intersecção de duas retas tem de satisfazer às equações de ambas as retas, portanto, obtemos o ponto comum **P (x, y)** a duas retas concorrentes resolvendo o sistema formado pelas suas equações”:

## Ponto Médio

Consoante Manoel Paiva (1999): “Se e são pontos distintos, então o ponto médio de segmento é tal que:”

Veja na figura 5, a seguir, uma representação ilustrativa do ponto M que é o ponto médio dos pontos A e B:

**Figura 5:** Ponto Médio

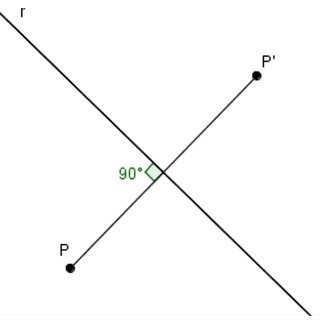


**Fonte:** mat310kaitlynwatkins.wordpress.com

# PONTO SIMÉTRICO EM RELAÇÃO À RETA

Primeiramente, é fundamental retomar o conceito de ponto simétrico em relação à uma reta qualquer. Dessa forma, dois pontos são simétricos quando obedecem às duas seguintes condições: são equidistantes à determinada reta e pertencem à uma outra reta que é perpendicular à reta de simetria. Ou seja, um ponto nada mais é que o reflexo do outro em relação a esta reta.

**Figura 6:** Ponto Simétrico em relação à Reta



**Fonte:** www.researchgate.net

Qual é o ponto simétrico **Ps (xs, ys)** de um ponto **P0 (x0, y0)** em relação à uma reta **r** de equação geral **ax + by + c = 0**?

## Encontrando a equação da reta s perpendicular à r

Através da equação geral da reta **r**, pode-se descobrir os coeficientes angular e linear dessa reta que chamaremos **mr** e **nr**, respectivamente:

Isolando y em um lado da igualdade:

Transformando a equação para sua forma reduzida:

Logo:

Como as retas **r** e **s** sãoperpendiculares, o coeficiente angular de uma é o oposto do inverso do coeficiente angular da outra. A partir disso, tem-se:

Dessa maneira, já pode-se deduzir como será a equação geral da reta perpendicular que será chamada de **s**. Lembrando que, ao contrário do que ocorre com os coeficientes angulares das retas na condição de perpendicularismo, seus coeficientes lineares são diferentes e não possuem nenhuma relação entre eles.

Transformando a equação para sua forma geral:

Multiplicando meios pelos extremos:

Igualando a equação a zero:

A constante **d** foi adotada apenas para diferenciar os coeficientes lineares das retas.

## Determinando as coordenadas do ponto de intersecção

Agora que já se sabe as equações de **r** e **s**, é possível descobrir o ponto de intersecção entre as retas. Para isso, basta resolver o sistema das equações, pois nesse ponto as coordenadas **x** e **y** serão as mesmas para ambas as retas. Este ponto de intersecção denominar-se-á **Pi (xi, yi)**.

Multiplicando-se a equação de **r** por **a** e a equação de **s** por **b**, tem-se:

Somando as equações do sistema:

Colocando **xi** em evidência e passando os demais termos para o outro lado da igualdade:

Isolando **xi**, chega-se em:

Assim ficou a coordenada **xi** do ponto de intersecção. A partir disso, para descobrir o resultado de **yi**, basta substituir o resultado de **xi** em alguma das equações do sistema. Será desenvolvido o resultado através da equação de **r**:

Inserindo na equação de **r** as coordenadas do ponto **Pi**:

Substituindo **xi** pelo termo encontrado, tem-se:

Isolando o termo que contém **yi** em um dos lados da igualdade:

Desenvolvendo o lado direito da igualdade:

Aplicando a propriedade distributiva no lado direito da igualdade:

Colocando a constante **b** em evidência no numerador:

Dividindo ambos os lados da igualdade por **b**, chega-se em:

Agora já se tem as duas coordenadas do ponto de intersecção das retas.

## Aplicando o conceito de ponto médio

Como mencionado anteriormente, o ponto de intersecção **Pi (xi, yi)** é ponto médio entre os pontos **P0 (x0, y0)** e **Ps (xs, ys)**. Então, é possível tirar a seguinte conclusão em relação as coordenadas destes pontos:

Desenvolvendo, primeiramente, a coordenada **x**:

Substituindo **xi** pelo termo encontrado, tem-se:

Isolando **xs** em um dos lados da igualdade:

Desenvolvendo o lado direito da igualdade:

Logo:

Agora, desenvolvendo a coordenada **y**:

Substituindo **yi** pelo termo encontrado, tem-se:

Isolando **ys** em um dos lados da igualdade:

Desenvolvendo o lado direito da igualdade:

Logo:

## Determinando as fórmulas das coordenadas do Ponto Simétrico

Assim, chegou-se em uma relação para **xs** e **ys**. Porém, ambas as relações contêm a variável **d** a qual não é dada no problema. No entanto, é possível isolá-la e colocá-la em função das coordenadas do ponto **P0** uma vez que este ponto pertence a reta **s**.

Inserindo na equação de **s** as coordenadas do ponto **P0**:

Isolando a constante **d**:

Como já se conhece o resultado de **d** em função das coordenadas de **P0**, basta substituir este valor nas relações das coordenadas de **Ps** que foram descobertas anteriormente:

Desenvolvendo, novamente, a coordenada **x**:

Substituindo **d** pelo termo encontrado:

Aplicando a propriedade distributiva no numerador:

Aplicando-se novamente:

Somando-se os termos do numerados:

Multiplicando a fração por -1:

Colocando os termos **x0** e **2a** em evidência, chega-se em:

Agora desenvolvendo a coordenada **y**:

Substituindo **d** pelo termo encontrado:

Aplicando a propriedade distributiva no numerador:

Aplicando-se novamente:

Somando-se os termos do numerados:

Colocando os termos **y0** e **2b** em evidência, chega-se em:

Sendo assim, pode-se calcular as coordenadas do ponto simétrico de **P0** em relação a reta **r** apenas com os dados do problema com as seguintes fórmulas:

## Fórmulas em função dos coeficientes angular e linear

A partir da fórmula do ponto simétrico em função dos coeficientes na reta em sua forma geral, pode-se chegar a outra fórmula em função dos coeficientes angular e linear da forma reduzida da reta.

Iniciando o desenvolvimento pela coordenada **x**:

Dividindo o numerador e o denominador por , tem-se:

Continuando o desenvolvimento:

Simplificando, chega-se em:

Sabendo-se que e , pode-se substituir os termos da fórmula e escreve-la da seguinte forma:

Desenvolvendo agora a coordenada **y**:

Dividindo o numerador e o denominador por , tem-se:

Continuando o desenvolvimento:

Simplificando, chega-se em:

Sabendo-se que e , pode-se substituir os termos da fórmula e escreve-la da seguinte forma:

Sendo assim, é possível calcular também as coordenadas do ponto simétrico de **P0** em relação a reta **r** com as seguintes fórmulas em função dos coeficientes angular e linear:

# ANÁLISES DE CASOS ESPECÍFICOS

Essa parte do trabalho destina-se a analisar dois casos específicos em que o coeficiente angular da reta vale +1 ou -1. Para isso, serão usadas as fórmulas em função dos coeficientes angular e linear demonstradas anteriormente.

## Coeficiente angular igual a +1

Desenvolvendo em **x**:

Substituindo o coeficiente angular **mr** por +1, tem-se:

Efetuando os cálculos:

Por fim:

Desenvolvendo em **y**:

Substituindo o coeficiente angular **mr** por +1, tem-se:

Efetuando os cálculos:

Por fim:

Sendo assim, nos casos em que o coeficiente angular da reta de simetria for igual a +1, basta aplicar as seguintes fórmulas para descobrir o par ordenado do ponto simétrico:

## Coeficiente angular igual a -1

Desenvolvendo em **x**:

Substituindo o coeficiente angular **mr** por -1, tem-se:

Efetuando os cálculos:

Por fim:

Desenvolvendo em **y**:

Substituindo o coeficiente angular **mr** por -1, tem-se:

Efetuando os cálculos:

Por fim:

Sendo assim, nos casos em que o coeficiente angular da reta de simetria for igual a +1, basta aplicar as seguintes fórmulas para descobrir o par ordenado do ponto simétrico:

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pode-se perceber que, após fazer uma breve introdução sobre a geometria analítica e apresentar alguns conceitos básicos desse ramo da matemática, o estudo demonstrou de uma forma didática o desenvolvimento das fórmulas do ponto simétrico em relação à reta.

A maneira usada para o desenvolvimento é o mesmo usado normalmente para o cálculo das coordenadas do ponto. Primeiramente, descobriu-se a equação da reta em que está contido o ponto e é perpendicular à reta de simetria, pois é nela que estão contidos o próprio ponto e seu ponto simétrico. Posteriormente, procurou-se encontrar o ponto de intersecção entre estas duas retas, uma vez que este ponto nada mais é que o ponto médio entre o ponto e o ponto simétrico. A partir daí, conhecendo as coordenadas do ponto inicial e do ponto de intersecção entre as retas, foi possível, através do conceito de ponto médio, descobrir as coordenadas do ponto simétrico em relação à reta de simetria.

Além do mais, pelo fato de as equações da reta apresentarem-se de duas formas, geral e reduzida, as fórmulas também foram apresentadas dessas duas maneiras tanto para o cálculo da coordenada **x** como para o cálculo da coordenada **y** em cada uma das situações. Foi analisado, também, um caso específico, na parte final do trabalho, onde as fórmulas se apresentam muito mais simples para o cálculo das coordenadas.

Portanto, o estudo realizado foi capaz de demonstrar o desenvolvimento das fórmulas do ponto simétrico em relação à reta com o objetivo de facilitar os cálculos do par ordenado deste ponto. Caso as fórmulas demonstradas aqui tenham alguma utilidade para a matemática, espera-se que ela estimule o aperfeiçoamento da técnica para ser expandida nos mais diversos ramos da matemática como, por exemplo, o plano tridimensional e seja empregada como uma ferramenta nos mais diversos campos das ciências exatas.

Dado o exposto, seria ainda mais satisfatório que a técnica fosse divulgada nos livros didáticos e ensinada nos bancos escolares do Brasil e do mundo e, além disso, sirva de exemplo e incentivo para o desenvolvimento de novas técnicas ainda mais complexas.

# REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar:** Geometria Analítica. São Paulo: Atual Editora, 1977.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** 1ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 1999.

Sem autor, **Plano Cartesiano.** Disponível em: https://www.significados.com.br/plano-cartesiano/. Acesso em: 30 Set 2021.