Universidade Federal de Tocantins - Campus Arraias
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
Universidade Aberta do Brasil – UAB
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

USO DA SOMATÓRIA EM QUESTÕES DE DIVISIBILIDADE E EM SEQUÊNCIAS

Raul Rodrigues dos Santos[1]

Introdução

Neste artigo, apresentaremos dois problemas relacionados à divisibilidade dos números naturais com a soma dos seus antecessores e mais uma questão de sequência por recorrência ao qua solucionaremos usando a somatória.

As demonstrações aqui apresentadas foram desenvolvidas durante o Curso “Resolução de Problemas” do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (ProfMat).

1.1 Demonstrações de divisibilidade de uma somatória

As afirmações abaixo foram desenvolvidas a partir da observação da somatória dos termos de uma Progressão Aritmética com razão e primeiro termo igual 1.

Para facilitar os estudos, observe as somatórias a serem utilizadas neste artigo.

$$\sum_1^1 i = 1$$

$$\sum_1^2 i = 1 + 2 = 3$$

$$\sum_1^3 i = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_1^4 i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \ddots$$

$$\sum_1^n i = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{(1+n)\,.\,n}{2} = \frac{n^2\,.\,n}{2}$$

Afirmação 1 - Todo número ímpar maior ou igual a 1 dividi a somatória dos seus antecessores naturais.

Exemplo:

$7 \mid 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

Como $7 \mid 21$, temos que 7 é um caso particular válido.

[1] Prof. Esp. pela Universidade Federal de Brasília - UnB e Mestrando na Universidade federal de Tocantins – UFT.

Solução:

Considere os números ímpares, como $2q + 1$, para todo $q \geq 0$, com $q \in \mathbb{N}$.

Dividiremos em duas partes nossa demonstração, a primeira com $q = 0$ e a segunda quando $q \geq 1$, $\forall\, q \in \mathbb{N}$.

- **1ª Parte:**

  Quando $q = 0$, temos 2(0) + 1 | 0 → 1 | 0.

  Obs: a soma dos antecessores naturais de 1 será 0.

- **2ª Parte:**

  Verificaremos se $2q + 1 \mid \sum_1^{2q} i$, $\forall\, q \geq 1$, com $q \in \mathbb{N}$.

Como $\sum_1^{2q} i$ é igual a 1 + 2 + ... + 2q, que por sua vez pode ser representada como a somatória de uma progressão aritmética de razão +1, com $a_1 = 1$ e $a_n = 2q$.

Sendo assim, $\sum_1^{2q} i = \frac{(1+2q)2q}{2} = (2q + 1).q$, $\forall\, q \geq 1$, com $q \in \mathbb{N}$.

Por fim, temos que $2q + 1 \mid (2q + 1).q \therefore 2q + 1 \mid \sum_1^{2q} i$, $\forall\, q \geq 1$.

Logo, todo número ímpar maior ou igual a 1 dividi a somatória dos seus antecessores naturais.

Afirmação 2 - Verifique se todo número par maior do que 1 dividi a diferença da somatória dos seus antecessores naturais com sua própria metade.

Exemplo:

$6 \mid (1+2+3+4+5) - \frac{6}{2} = 15 - 3 = 12$

Como 6 | 12, temos que 6 é um caso particular válido.

Solução:

Considere os números pares, como $2q$, para todo $q \geq 1$, $\forall\, q \in \mathbb{N}$.

Verificaremos se $2q \mid \left(\sum_1^{2q-1} i \right) - \frac{2q}{2}$, $\forall\, q \geq 1$, com $q \in \mathbb{N}$.

Como $\sum_1^{2q-1} i$ é igual a 1 + 2 + ... + (2q – 1), que por sua vez pode ser representada como a somatória de uma progressão aritmética de razão +1, com $a_1 = 1$ e $a_n = 2q - 1$.

Temos que, $\sum_1^{2q-1} i = \frac{[1+(2q-1)]\,.\,(2q-1)}{2} = \frac{2q\,.\,(2q-1)}{2} = (2q - 1).q$, $\forall\, q \geq 1$, com $q \in \mathbb{N}$.

Sendo assim, $\left(\sum_1^{2q-1} i \right) - \frac{2q}{2} = (2q - 1).q - \frac{2q}{2}$, $= 2q^2 - q - q = 2q\,(q - 1)$, $\forall\, q \geq 1$, para todo $q \in \mathbb{N}$..

Por fim, $2q \mid 2q\,(q - 1) \therefore 2q \mid \left(\sum_1^{2q-1} i \right) - \frac{2q}{2}$

Logo, todo número par maior do que 1 dividi a diferença da somatória dos seus antecessores naturais com sua própria metade

1.2 Somatória em uma sequência por recorrência

Com base na Sequência por recorrência abaixo:

$$a_n = a_{n-1} + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + ... + \sum_1^{n-1} i + \sum_1^n i, \forall\, n \geq 2, \text{ com } n \in \mathbb{N}. \text{ Com } a_1 = \sum_1^1 i.$$

a) Determine os 5 primeiros termos dessa sequência.

b) Encontre o termo geral desta sequência, em função apenas de n.

c) Encontre o soma dos n termos desta sequência, em função apenas de n.

d) Determine a soma dos 4 primeiros termos desta sequência.

Solução da letra a:

$a_1 = \sum_1^1 i = 1$

$a_2 = a_1 + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i = 1 + 1 + 3 = 5$

$a_3 = a_2 + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + \sum_1^3 i = + 1 + 3 + 6 = 15$

$a_4 = a_3 + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + \sum_1^3 i + \sum_1^4 i = 15 + 1 + 3 + 6 + 10 = 35$

$a_5 = a_4 + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + \sum_1^3 i + \sum_1^4 i + \sum_1^5 i = 35 + 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 70$

Solução da letra b:

Nota-se que podemos representar a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, como:

$a_1 = \sum_1^1 i$

$a_2 = (\sum_1^1 i) + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i$

$a_3 = (\sum_1^1 i + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i) + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + \sum_1^3 i$

$a_4 = (\sum_1^1 i + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + \sum_1^3 i) + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + \sum_1^3 i + \sum_1^4 i$

$a_5 = (\sum_1^1 i + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + \sum_1^3 i + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + \sum_1^3 i + \sum_1^4 i) + \sum_1^1 i + \sum_1^2 i + \sum_1^3 i + \sum_1^4 i + \sum_1^5 i$

Nota-se a existência de um padrão, vejamos:

$a_1 = 1.\sum_1^1 i$

$a_2 = 2.\sum_1^1 i + 1.\sum_1^2 i$

$a_3 = 3.\sum_1^1 i + 2.\sum_1^2 i + 1.\sum_1^3 i$

$a_4 = 4.\sum_1^1 i + 3.\sum_1^2 i + 2.\sum_1^3 i + 1.\sum_1^4 i$

$a_5 = 5.\sum_1^1 i + 4.\sum_1^2 i + 3.\sum_1^3 i + 2.\sum_1^4 i + 1.\sum_1^5 i$

$\vdots \quad = \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots$

Com isso,

$a_n = n.\sum_1^1 i + (n-1).\sum_1^2 i + \cdots + 2.\sum_1^{n-1} i + 1.\sum_1^n i,$, $\forall\, n \geq 2$, com $n \in \mathbb{N}$.

Solução da letra c:

Com base na resolução do item b, temos:

$a_1 = 1.\sum_1^1 i$

$a_2 = 2.\sum_1^1 i + 1.\sum_1^2 i$

$a_3 = 3.\sum_1^1 i + 2.\sum_1^2 i + 1.\sum_1^3 i$

$a_4 = 4.\sum_1^1 i + 3.\sum_1^2 i + 2.\sum_1^3 i + 1.\sum_1^4 i$

$a_5 = 5.\sum_1^1 i + 4.\sum_1^2 i + 3.\sum_1^3 i + 2.\sum_1^4 i + 1.\sum_1^5 i$

$\vdots \quad = \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots$

$a_n = n.\sum_1^1 i + (n-1).\sum_1^2 i + \cdots + 2.\sum_1^{n-1} i + 1.\sum_1^n i$, $\forall\, n \geq 2$, com $n \in \mathbb{N}$.

Somando $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, $\forall\, n \geq 2$, com $n \in \mathbb{N}$.

$a_1 = 1.\sum_1^1 i +$

$a_2 = 2.\sum_1^1 i + 1.\sum_1^2 i +$

$a_3 = 3.\sum_1^1 i + 2.\sum_1^2 i + 1.\sum_1^3 i +$

$a_4 = 4.\sum_1^1 i + 3.\sum_1^2 i + 2.\sum_1^3 i + 1.\sum_1^4 i +$

$a_5 = 5.\sum_1^1 i + 4.\sum_1^2 i + 3.\sum_1^3 i + 2.\sum_1^4 i + 1.\sum_1^5 i +$

$\vdots \quad = \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots$

$a_n = n.\sum_1^1 i + (n-1).\sum_1^2 i + \cdots + 2.\sum_1^{n-1} i + 1.\sum_1^n i$, $\forall\, n \geq 2$, com $n \in \mathbb{N}$.

Colocando em evidência $\sum_1^1 i, \sum_1^2 i, \cdots, \sum_1^{n-1} i, \sum_1^n i$, temos

$S_n = (1 + 2 + \cdots + n).\sum_1^1 i + (1 + 2 + \cdots + n - 1).\sum_1^2 i + \cdots + (1 + 2).\sum_1^{n-1} i + (1).\sum_1^n i$, para todo $n \geq 2$, com $n \in \mathbb{N}$.

Por fim temos a somatória,

$S_n = \sum_1^n i\,.\sum_1^1 i + \sum_1^{n-1} i\,.\sum_1^2 i + \cdots + \sum_1^2 i.\sum_1^{n-1} i + \sum_1^1 i.\sum_1^n i$, $\forall\, n \geq 2$, com $n \in \mathbb{N}$.

Solução da letra d:

$S_n = \sum_1^n i\,.\sum_1^1 i + \sum_1^{n-1} i\,.\sum_1^2 i + \cdots + \sum_1^2 i.\sum_1^{n-1} i + \sum_1^1 i.\sum_1^n i$

$S_4 = \sum_1^4 i\,.\sum_1^1 i + \sum_1^3 i\,.\sum_1^2 i + \sum_1^2 i.\sum_1^3 i + \sum_1^1 i.\sum_1^4 i$

$S_4 = 10.1 + 6.3 + 3.6 + 1.10 = (10 + 18 + 18 + 10) = 56$

Também podemos resolver da seguinte forma:

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$S_4 = 1 + 5 + 15 + 35 = 56$

Atividades Extras

e) Determine a soma dos 5 primeiros termos.

f) Conjecture uma nova somatória de n termos, quando n for par, quando $n \geq 2$, com $n \in \mathbb{N}$.

g) Conjecture uma nova somatória de n termos, quando n for um número ímpar, com $n \geq 3$, com $n \in \mathbb{N}$.

Referências

MORGADO, Augusto César. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014.