PESQUISA OPERACIONAL

A Pesquisa Operacional (PO) tem sido grandemente empregada em organizações governamentais (federais, estaduais e municipais), militares e de utilidade pública (como escolas, sindicatos, hospitais e bibliotecas). Torna-se cada vez mais comum seu emprego em áreas das mais variadas.

Primeiras equipes de Pesquisa Operacional: 2a Guerra Mundial - os líderes britânicos pedem aos cientistas e engenheiros para analisar diversos problemas militares

–organização de rotas;

–gerenciamento de operações de comboio, bombardeio e minas explosivas;

–alocação de recursos escassos às várias operações militares, etc.

• O resultado foi chamado de Pesquisa de Operações Militares e mais tarde Pesquisa de Operações.

• Utilização em indústrias, negócios e governo.

1.0 A EVOLUÇÃO DA PESQUISA OPERACIONAL

O termo "PO" foi empregado pela primeira vez em 1939. A partir de individualizada e batizada, tornou-se possível fixar suas origens em épocas remotas da história da ciência e da sociedade.

Origens da PO:

Na Primeira Revolução Industrial começaram a surgir os problemas que a nova disciplina iria resolver. À medida que emergiam formas de administração mais especializadas também surgiram aplicações mais especializadas da ciência, tais como engenharia de movimentação de materiais, controle estatístico de qualidade, engenharia de manutenção e de confiabilidade e pesquisa no setor de promoção e vendas. Um aspecto importante dessa evolução baseia-se no fato que não se aplicou o conhecimento científico à novas funções de direção que iam surgindo na administração. Para que a função de direção possa ser exercida é necessário o estabelecimento de objetivos e medidas de avaliação do desempenho das unidades que lhe são subordinadas, a tarefa de integração exige que todo o sistema seja considerado; isto é a essência do trabalho do dirigente. Com isso exigia-se cada vez mais do dirigente que passou a necessitar da ajuda de pessoas com mais experiência dos problemas que surgiam e com mais tempo para estudá-los, provocando o aparecimento dos consultores de administração, cuja atividade, no início, não se baseava nem na ciência nem na pesquisa científica.

O que denominamos PO custou a aparecer no cenário do desenvolvimento da administração industrial. A estagnação da PO poderia ter continuado indefinidamente, não fosse o desenvolvimento que teve nas organizações militares com a deflagração da Segunda Guerra Mundial.

A diferença principal entre a evolução dos administradores militares e a dos administradores industriais ocorreu entre o fim da Primeira Guerra Mundial e o início da Segunda. Quando os administradores e dirigentes militares ingleses teriam recorrido à ajuda de cientistas para incorporar o radar às táticas e à estratégia da defesa antiaérea.

O emprego de equipes de cientistas difundiu-se entre os Aliados. Este trabalho ficou conhecido como *pesquisa operacional* no Reino Unido e recebeu diversas denominações nos Estados Unidos : análise de operações, avaliação de operações, pesquisa de operações, análise de sistemas, avaliação de sistemas, pesquisa de sistemas e ciência de administração. O nome pesquisa operacional era o mais usado.

Os ingleses reduziram os gastos destinados à pesquisa no campo da defesa nacional, isto causou a liberação de muitos especialistas em PO das organizações militares no momento em que os administradores industriais defrontavam-se com a necessidade de reconstruir grande parte das instalações fabris da Grã-Bretanha, pedindo o auxílio dos especialistas em PO. As aplicações industriais da PO começaram a surgir na exploração do carvão, na siderúrgica, nos transportes, nas empresas de serviço público.

Nos Estados Unidos à aplicação da ciência aos problemas de administração industrial deve-se ao advento da Segunda Revolução Industrial. O avanço científico no estudo de comunicações, controle e computação, o que forneceu a base tecnológica da automação. A possibilidade de emprego de “cérebros eletrônicos” como instrumento de administração foi amplamente divulgada e os dirigentes, tiveram de recorrer ao auxílio dos especialistas para a seleção e utilização de computadores.

No início da década de 1950 a indústria começou a absorver alguns dos especialistas em PO que deixavam as organizações militares; os demais eram absorvidos por empresas de consultoria, universidades, institutos de pesquisa e órgãos governamentais.

Hoje mais da metade das maiores empresas dos Estados Unidos mantém equipes de PO ou utilizam seus serviços. Organizou-se uma associação nacional em 1953 - a “Operations Research Society of America“.

Em 1957 foi fundada a Federação Internacional de Associações de Pesquisa Operacional. Começaram a surgir revistas técnicas, cursos e programas em PO.

O Método da PO

A experimentação tomada no sentido restrito - isto é, a manipulação física das variáveis - é geralmente impossível ou impraticável quando se lida com organizações governamentais, militares ou industriais. Apesar disso, a experimentação é às vezes possível, particularmente no caso de subsistemas, e desempenha papel importante na PO; a maioria das vezes, entretanto, o sistema global em estudo não pode ser submetido a um tratamento desta natureza.

Quem trabalha em pesquisa operacional é geralmente obrigado a construir representações do sistema e do seu comportamento para se orientar durante a pesquisa. Os modelos em PO assumem a forma de uma ou mais equações ou inequações para traduzir a condição de que algumas, ou todas as variações controladas só podem ser manipuladas dentro de limites. O conjunto destas equações constitui, ao mesmo tempo, um modelo de sistema e um modelo de decisão.

A solução pode ser extraída do modelo mediante experimentação (isto é, por simulação) ou mediante análise matemática. Para alguns tipos de função f (por exemplo, relações algébricas elementares), desde que as restrições não sejam numerosas, a matemática clássica fornece instrumentos perfeitamente adequados para a determinação dos melhores valores das variáveis controladas. Por outro lado, a função f pode consistir em um conjunto de regras de cálculo (um algoritmo) que nos permita medir a utilidade (U) do desempenho para qualquer conjunto de valores das variáveis controladas e não controladas.

Em alguns casos o comportamento do elemento humano que toma a decisão não pode ser representado no modelo. Ocorre a necessidade do uso de simulações que envolverão a participação de seres humanos, sendo denominadas *jogos de operações*. A otimização, portanto, produz a melhor solução para o problema que foi modelado.

A correspondência entre modelo e realidade terá de ser aferida (testada) e a solução avaliada. Isto é, teremos de comparar seu desempenho com o da política ou procedimento que ela irá substituir. Os resultados da pesquisa devem ser implantados. É nesta fase que se faz o teste e a avaliação final da pesquisa; proporciona pois, ao especialista as maiores e melhores oportunidades de aprender.

Cinco fases num projeto de PO:

1. Formulação do problema
2. Construção do modelo
3. Obtenção da solução
4. Teste do modelo e avaliação da solução
5. Implantação e acompanhamento da solução (manutenção)

As vantagens e desvantagens da utilização de modelos foram assim definidas por Beuren (1989):

<u>Vantagens</u>

a. emerge sob a forma gráfica, para representar a realidade aprendida em determinado momento;
b. simplifica a visualização da amplitude das variáveis sem alterar a essência;
c. ajuda a identificar várias relações possíveis entre os elementos da realidade;
d. permite compreender relações complexas;
e. serve como base para estabelecer e aprimorar parâmetros.

<u>Desvantagens</u>

a. limitações na identificação de todas as variáveis relevantes que influenciam em determinada situação;
b. problemas na definição das propriedades a serem mensuradas e na especificação de procedimentos para tal;
c. dificuldades no entendimento entre os provedores e os usuários da informação.

De acordo com Garcia (1997: p. 1212), "a representação simplificada de um problema do mundo real através de um modelo matemático permite que sobre ele se aplique técnicas e métodos que facilitam a obtenção de uma solução".

1.1 O IMPACTO DA PESQUISA OPERACIONAL

A Pesquisa Operacional tem tido um grande impacto crescente na administração de empresas nos anos recentes. Tanto o número quanto a variedade de suas aplicações continuam a crescer rapidamente. Algumas de suas técnicas envolvem idéias bastante sofisticada em ciências políticas, matemática, economia, teoria da probabilidade e estatística. Como também sendo usada amplamente em outros tipos de organizações, inclusive negócios e indústria. Segundo Hillier quase todas as doze maiores empresas do mundo, e uma considerável proporção das organizações industriais pequenas, têm grupos de pesquisa operacional bem estabelecidos. Muitas indústrias, inclusive a de aviação e mísseis, automóveis, comunicações, computadores, energia elétrica, eletrônica, alimentos, metalúrgica, mineração, papel, petróleo e transporte, têm feito uso extensivo da pesquisa operacional. Mesmo instituições financeiras, agências governamentais e hospitais têm aumentado rapidamente o uso que fazem da pesquisa operacional.

Vejamos alguns dos problemas que têm sido resolvidos por técnicas particulares de pesquisa operacional:

- PROGRAMAÇÃO LINEAR: tem sido usada com sucesso na solução de problemas relativos à alocação de pessoal, mistura de materiais, distribuição, transporte, carteira de investimento.

- PROGRAMAÇÃO DINÂMICA: tem sido aplicada também com sucesso a áreas como planejamento de despesas de publicidade, distribuição do esforço de vendas e programação de produção.

- TEORIA DAS FILAS: tem tido aplicação na solução de problemas relativos a congestionamento de tráfego, máquinas de serviços sujeitas a quebra, determinação do nível de uma força de serviço, programação do tráfego aéreo, projetos de represas, programação de produção e operação de hospitais.

- PROGRAMAÇÃO INTEIRA: Que é uma forma de programação linear onde as variáveis podem apenas apresentar números inteiros. Tem sido utilizada na resolução de problemas de investimento dentre outros.

Outras técnicas de pesquisa operacional, tais como teoria de estoque, teoria dos jogos e simulação, também têm sido aplicadas com sucesso a diversos contextos.

1.2 PROBLEMAS TÍPICOS

Desde o começo a PO vem sendo aplicada a grande variedade de problemas. A maioria consiste em problemas de natureza tática e não estratégica. A distinção entre problemas táticos e problemas estratégicos se baseia em três características:

1º.) Alcance do problema: Um problema é mais tático que outro se sua solução produzir efeito de duração mais curta ou, o que e essencialmente se a solução pode ser modificada ou abandonada com facilidade.

2º.) Extensão do problema: Um problema é tanto mais estratégico quanto maior for a parte da organização diretamente afetada pela solução.

3º.) Orientação do problema: Um problema é tanto mais estratégico quanto mais envolver a determinação de finalidades, metas ou objetivos.

Podemos separar a forma de um problema do seu conteúdo pelo processo denominado *abstração*. A linguagem na qual expressamos a forma assim abstraída do conteúdo é a linguagem da matemática. Portanto, um modelo matemático de decisão é uma representação da forma de um problema. A abstração da forma exige o conhecimento do conteúdo do problema.

A aplicação da PO a grande variedade de problema táticos pode ser representada por um pequeno número de problemas típicos. Desenvolveram-se técnicas para modelá-los e obter soluções a partir dos modelos.

Problemas típicos:

1. Alocação
2. Estoque
3. Substituição ou reposição
4. Filas de espera
5. Seqüência e coordenação
6. Determinação de rotas
7. Situações de competição
8. Busca de informação

Quando lidamos com modelos múltiplos, a solução é geralmente obtida resolvendo-se os modelos em seqüência e repetindo o ciclo até que se obtenha uma solução satisfatória para o problema global.

Algumas das técnicas matemáticas empregadas para a solução dos modelos, aplicam-se a modelos de diferentes tipos. Os modelos são freqüentemente classificados segundo de métodos e técnicas matemáticas empregadas na obtenção da sua solução. Estas técnicas e métodos são indicados a seguir:

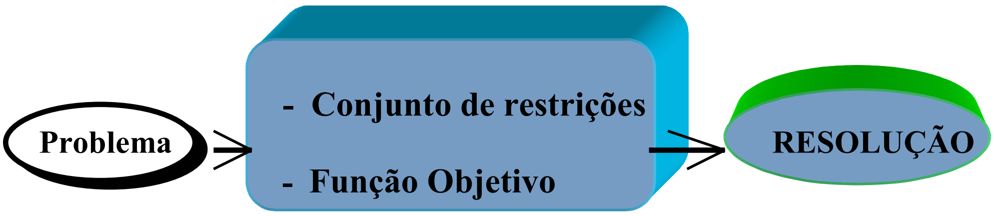
- Programação Linear;
- Programação Dinâmica;
- Programação Inteira;
- Teoria dos Estoques;
- Teoria das Filas;
- Programação multiobjetiva
- Simulação;
- Teoria dos Jogos;
- Teoria dos Grafos;
- Análise de Risco, etc.

2.0 PROGRAMAÇÃO LINEAR

2.1 INTRODUÇÃO

Programação Linear é uma técnica de otimização bastante utilizada na resolução de problemas que tenham seus modelos representado por expressões lineares. Pela sua simplicidade e a possibilidade de aplicação em uma considerável diversidade de problemas, tornou-se um recurso bastante difundido.

Podemos assim resumir a técnica de Programação Linear:



Chamamos de conjunto de restrições, as expressões contornais do problema, ou seja, todas as disponibilidades e limitações levantadas do problema, numa linguagem matemática comparativa: desigualdades ou igualdades ($<$, $=$ ou $>$). A função objetivo, é obtida com as mesmas variáveis das restrições, com o objetivo de ser maximizada ou minimizada, com a resolução do sistema restritivo.

Quanto a resolução, pode ser:

a) Problema com duas variáveis
- Gráfica
- Análise matemática
- Algorítmo (Método Simplex).

b) Problema com um número qualquer de variáveis
- Análise matemática
- Algorítmo (Método Simplex)

O modelo matemático de um problema de otimização pode ser formulado como segue (Chiang: 1982, p. 556):

Max. Ou Min.

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots c_nx_n$ (1)

Sujeito a:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n \leq r_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n \leq r_2$ (2)

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn}x_n \leq r_m$

e $x_j \geq 0$ ($j = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,n$)

onde:

a. (1) representa a função matemática que codifica o objetivo do problema e é denominada função objetivo.
b. (2) representam as funções matemáticas que codificam as principais restrições identificadas.
c. "Z" é a função a ser maximizada ou minimizada, respeitando o conjunto de restrições.
d. "x_i" são as variáveis decisórias que representam as quantidades ou recursos que se quer determinar para otimizar o resultado global.
e. "c_i:" são os coeficientes de ganho ou custo que cada variável é capaz de gerar.
f. "r_j" representa a quantidade disponível de cada recursos
g. "a_{ij}" representa a quantidade de recursos que cada variável decisória consome.

Este trabalho vai demonstrar passo a passo a resolução de problemas de programação linear onde as restrições possuem sinal de maior (>)ou igual (=).

A programação linear é o campo mais vastos das programações matemáticas , uma das variantes de aplicação generalizada em apoio a decisão. O termo programação deve entender-se como “planejamento” e a qualificação “linear” deixa antever que as relações matemáticas utilizadas são funções lineares.

Todos os cálculos serão desenvolvidos através do método simplex desenvolvido pelo matemático George dantzig , que é considerado o pai da programação linear.

O método simplex é considerado como um dos mais significativos avanços da matemática no século XX.

Fig1: George dantizg

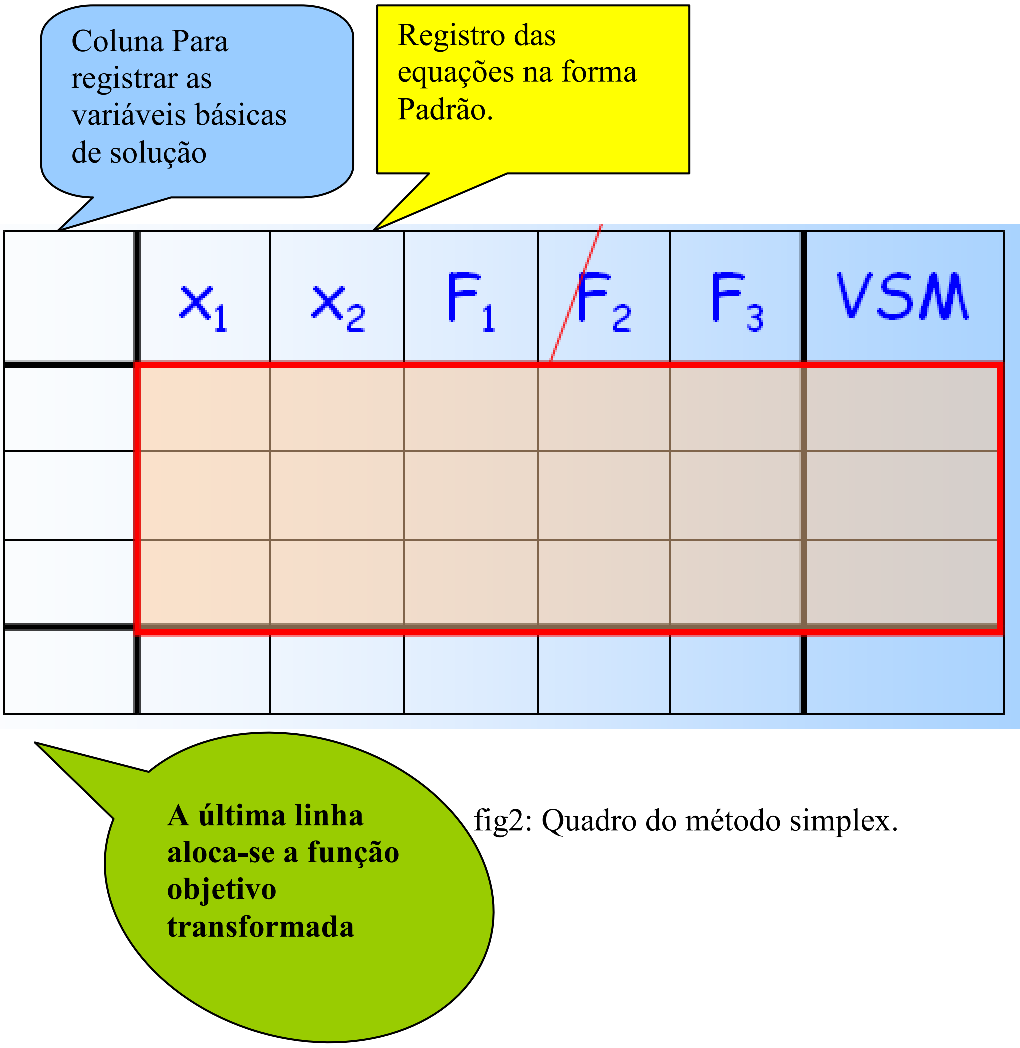


fig2: Quadro do método simplex.

Problema:

Uma companhia de transporte tem 3 tipos de caminhões o tipo "A" tem 2m3 de espaço refrigerado e 3m3 de espaço na refrigerado. O tipo "B"tem 2m3 de espaço refrigerado e 1m3 de espaço não refrigerado e o tipo C tem 3m^3 de espaço refrigerado e 5m^3 de espaço não refrigerado . O cliente quer transportar um produto que necessitará de 20m^3 de área refrigerada e a área não refrigerada seja igual a 10m^3. A companhia calcula entre 1.100 litros o combustível para uma viagem com o caminhão "A"e 750 litros para o caminhão "B" e "C" 800 litros.

Quantos caminhões de cada tipo deverão ser usados no transporte do produto com o menor consumo de combustível.

1º Passo: Todo o problema de modelagem matemática inicia-se pela discrição das variáveis de decisão, neste caso P1,P2 e P3.

- $ X1=> Quantidade de Caminhão tipo A
- $ X2=> Quantidade de Caminhão tipo B
- $ X3=> Quantidade de caminhão tipo C

2º Passo: Expressar a função objetivo, neste caso a empresa quer minimizar o consumo de combustível , portanto tem-se:

FUNÇÃO OBJETIVO: Min C= 1.700X1+750X2+800X3

3º Passo: Expressar as restrições técnicas.

2X1+2X2+5X3 ≥ 20 ⇨ **Disponibilidade mínima de espaço refrigerado**

3X1+X2+5X3 = 10 ⇨ **Disponibilidade de espaço não refrigerado**

Variáveis de não negatividade X1,X2e X2 ≥ 0

RESOLUÇÃO

Repare que as restrições possuem sinais de igual (=) e (≥) maior, neste caso é necessário realizar transformações lineares neste equações.

Na restrição do tipo (≥) é equilibrada com uma variável excedentária, passando para: **2X1+2X2+5X3 –E1= 20.**

A segunda restrição já esta equilibrada: **3X1+X2+5X3 = 10**

Forma padrão do Simplex

Função objetivo: **Min C= 1.700X1+750X2+800X3+0E1**

Restrições técnicas

2X1+2X2+5X3 –E1= 20

3X1+X2+5X3 = 10

X1,X2,X3eE1≥ 0

Quadro do simplex.

VB	x1	x2	x3	E1	VSM
?	3	1	5	0	10
?	2	2	5	-1	20

Não há uma matriz identidade para uma solução inicial !! Porquê?

Repare que na 1º restrição do tipo (=) não há variável folga, pois a restrição diz que deve ser utilizado exatamente $10m^3$ de espaço não refrigerado.

Na segunda restrição do tipo (≥) , a variável auxiliar tem coeficiente -1

Técnica da variável artificial

Forma padrão do simplex:

Função objetivo: **Min C= 1.700X1+750X2+800X3+0E1**

Restrições técnicas

2X1+2X2+5X3 –E1= 20

3X1+X2+5X3 = 10

X1,X2,X3eE1≥ 0

Nas restrições do tipo (=) e (≥), acrescenta uma variável artificial, ficando:

Função objetivo: **Min C= 1.700X1+750X2+800X3+0E1**

S.a: **2X1+2X2+5X3 –E1+A1= 20**

3X1+X2+5X3+A2 = 10

X1,X2,X3,E1,A1 eA2≥ 0

Técnica da variável artificial Quadro inicial

VB	x1	x2	x3	E1	A1	A2	VSM
A1	2	2	5	-1	1	0	20
A2	3	1	5	0	0	1	10

Repare que já temos a matriz identidade que esta sendo formada pelas variáveis artificiais A1 e A2 .

A soma original entre x1 e x2 e x2 igual a 10, só se matem se a variável artificial A2 for igual a zero. Idem com A1. Tenho a identidade mas arranjei um “Gargalho”.

Tenho que me livrar de A1 e A2 , mas como fazer isso?

Preciso de A1=0 e A2=0, conheço o método simplex para maximização ou minimização, então vou começar por minimizar a soma de A1+A2.

Resumindo

- ✓ Organize uma função que seja a soma das variáveis artificiais;
- ✓ Minimize a função utilizando o método simplex;
- ✓ Atingindo o ótimo, ou o mínimo da soma é nulo e esta livre das variáveis artificiais;
- ✓ Caso o mínimo das soma não seja nulo, conclui-se que o sistema de equações não tem solução.

Este é o primeiro passo do método dos dois passos.

Função artificial igual= a soma das variáveis artificiais

Min(FA)=A1+A2

No quadro teremos F(A)= -A1-A2=0

VB	x1	x2	x3	E1	A1	A2	VSM
A1	2	2	5	-1	1	0	20
A2	3	1	5	0	0	1	10
F(A)	0	0	0	0	-1	-1	0

Análise o quadro podemos iniciar o cálculo?

Acertou quem disse não

- ✓ Veja que no quadro A1=20 e A2=10, pela soma daria F(A)= 30
- ✓ No quadro estamos lendo F(A)=0, o que está errado. Isto acontece porque as variáveis artificiais estão não base, mas não têm coeficiente nulo na equação da função.
- ✓ É necessário transformar linearmente a equação da função o que é feito no próprio quadro.

A transformação linear é feita da seguinte maneira: Some as equações que tem variáveis artificiais e nesta obterá coeficiente nulos para as variáveis artificiais, que são variáveis básicas, e o valor da função será 30

VB	x1	x2	x3	E1	A1	A2	VSM
A1	2	2	5	-1	1	0	20
A2	3	1	5	0	0	1	10
F(A)	0	0	0	0	-1	-1	0
Soma	2+3+0	2+1+0	5+5+0	-1	1+0-1	0+1-1	20+10+0
F(A)	5	3	10	-1	0	0	30

O quadro esta pronto para o cálculo.

Entra na base X3, pois é o coeficiente mais positivo que estamos a minimizar

Ratio:

20/5=4

10/5=2

Sai A2 menor ratio não negativo.

Dividir a linha A2, por (5)

Depois Multiplica esta no linha A2 x -5+ a linha A1, pois temos que zerar a coluna X3

VB	x1	x2	x3	E1	A1	A2	VSM
A1	-1,0000	1,0000	0,0000	-1,0000	1,0000	-1,0000	10,0000
A2	0,6000	0,2000	1,0000	0,0000	0,0000	0,2000	2,0000
F(A)	-1,0000	1,0000	0,0000	-1,0000	0,0000	-2,0000	10,0000

Solução não ótima, pois há coeficientes positivos na equação da função.

Entra X2 na base

Sai: 10/1=10

2/0,2= 10, neste caso escolhe aleatoriamente um deles, vou escolher A1

VB	x1	x2	x3	**E1**	**A1**	A2	VSM
A1	-1,0000	1,0000	0,0000	**-1,0000**	**1,0000**	-1,0000	10,0000
A2	0,8000	0,0000	1,0000	**0,2000**	**-0,2000**	0,4000	0,0000
F(A)	0,0000	0,0000	0,0000	**0,0000**	**-1,0000**	-1,0000	0,0000

- ✓ Solução ótima todos os coeficientes da função são não positivos;
- ✓ Min F(A) implica que variáveis artificiais com valor nulo;
- ✓ A base ótima da solução do sistema de equação da forma padrão. Vai ser utilizada para a otimização da função objetivo.

Já reparou na simetria das colunas E1 e A1.

Já reparou que na equação final da função artificial e igual à do quadro inicial. Isto só acontece porque o mínimo de F(A) é zero e todas as variáveis artificiais são variáveis não básicas (pode obter min F(A) =0 com uma ou variáveis artificiais na base com valor zero.

2º passo otimizar a função objetivo

Do modelo matemático temos: **Min C= 1.700X1+750X2+800X3**

O 2º passo do método consiste em minimizar esta função, aplicando o método simplex na base ótima obtida no final do primeiro passo.

VB	x1	x2	x3	E1	VSM
X1	-1,0000	1,0000	0,0000	-1,0000	10,0000
X2	0,8000	0,0000	1,0000	0,2000	0,0000
F(O)	-1700,0000	-750,0000	-800,0	0,0000	0,0000

O quadro esta pronto para a solução?

Quem respondeu não acertou. Veja que o coeficiente de X2=10 e X3=0 , pelo que a função objetivo= Min C= 1.700x0+750.10+800.0= R$ 7.500,00.

No quadro esta se lendo F(O)=0, o que está errado. Isto acontece porque as variáveis X1,X2 e X3, estão na base mas não tem coeficiente nulo na equação da função.

É necessário transformar linearmente a equação da função que é feito no próprio quadro.

Ligue os coeficiente a anular às coordenadas unitárias das respectivas variáveis básicas, coloque a esquerda desta variável básica o simétrico do coeficiente que tem em F(O). Multiplique as equações pelos valores situados à esquerda, e some-as à equação da função.

VB	x1	x2	x3	E1	VSM
X2 =750	-1,0000	1,0000	0,0000	-1,0000	10,0000
X3= 800	0,8000	0,0000	1,0000	0,2000	0,0000
F(O)	-1700,0000	-750,0000	-800,0000	0,0000	0,0000
Soma		750*1+800*0-750	750*0+800*1-800	750*-1+800*0,2+0	750*10+800*0+0
F(O)		0	0	-590	7.500,00

Solução ótima foi atingida todos os coeficientes são não negativos estamos a minimizar

$$X= \begin{pmatrix} X2 \\ X3 \\ X1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Min C= 750*10+800*0= R$ 7.500,00

A solução ótima é única, pois só as variáveis básicas têm coeficiente nulos na equação da função. Neste exercício a solução ótima é utilizar somente o caminhão B na quantidade de 10 caminhões.

2*0+2*10+5*0 = 20

3*0+1*10+5*0 = 10

Atendendo as necessidades do cliente é ao menor consumo possível de combustível.

A Fábrica de Rádios fabrica os Modelos A, B e C que têm contribuições ao lucro de 16, 30 e 50, respectivamente. As exigências de produção mínimas semanais são 20 para o Modelo A, 120 para o Modelo B e 60 para o Modelo C. Cada tipo de rádio requer uma certa quantidade de tempo para a fabricação das partes componentes, para a montagem e para a embalagem. Especificamente, uma dúzia de unidades do Modelo A requer três horas para fabricar, quatro horas para montar e uma para embalar. Os números correspondentes para uma dúzia de unidades do Modelo B são 3.5, 5 e 1.5, e para uma dúzia de unidades do Modelo C são 5, 8 e 3. Durante a próxima semana, a fábrica tem disponíveis 120 horas de tempo de fabricação, 160 horas de montagem e 48 horas de embalagem.

Variáveis de decisão

X1=> Quantidade a ser produzida/ vendida do modela A

X2=> Quantidade a ser produzida/ Vendida do modelo B

X3=> Quantidade a ser produzida/ vendida do modelo C

Função Objetivo: MAX LUCRO) 16X1+30X2+50X3

Restrições técnicas

$X1 \geq 20$ Exigências mínimas de produção do modela A

$X2 \geq 120$ Exigências mínimas de produção do modela B

$X3 \geq 60$ Exigências mínimas de produção do modela C

$0.25X1+0.29167X2+0.4167X3 \leq 120$ Disponibilidade de horas Fabricação

$0.333X1+0.4167X2+0.6667X3 \leq 160$ Disponibilidade de horas Montagem

$0.0833X1 + 0.125X2 + 0.25X3 \leq 48$ Disponibilidade de horas embalagem

Variáveis de não negatividade

$X1, X2$ e $X3 \geq 0$

Modelo na forma padrão do simplex

MAX L= **16X1+30X2+50X3**

S.a: X1 –E1= 20

X2-E2= 120

X3-E3=60

0.25X1+0.29167X2+0.4167X3 +F1=120

0.333X1+0.4167X2+0.6667X3 +F2= 160

0.0833X1 + 0.125X2 + 0.25X3 +F3= 48

Variáveis de não negatividade X1,X2,X3,F1,F2,F3,E1,E2 e E3 $\geq$ **0**

Nota: - Restrições do tipo ($\leq$) São equilibradas com uma variável de Folga (F)

- Restrições do tipo ($\geq$) São equilibradas com uma variável excedentária (E)

Quadro Inicial

X1	X2	X3	F1	F2	F3	E1	E2	E2	VSM
0,2500	0,2917	0,4167	1	0	0	0	0	0	120,0000
0,3333	0,4167	0,0667	0	1	0	0	0	0	160,0000
0,0833	0,1250	0,2500	0	0	1	0	0	0	48,0000
1,0000	0,0000	0,0000	0	0	0	-1	0	0	20,0000
0,0000	1,0000	0,0000	0	0	0	0	-1	0	120,0000
0,0000	0,0000	1,0000	0	0	0	0	0	-1	60,0000

Repare que não há matriz identidade. Nas restrições de($\leq$) o vetor de F1,F2 e F3, servem para matriz identidade F1,F2 e F3. F1,F2 e F3 são variáveis básicas na três primeiras restrições.

As restrições do tipo ($\geq$) a variável auxiliar tem valor negativo.

Para resolver este problema, vamos utilizar a técnica da variável auxiliar onde:

- ✓ As variáveis do tipo ($\geq$) **e (=)** acrescenta-se uma variável artificial.

Técnica da variável artificial Forma padrão do simplex

F(O) MAX L= **16X1+30X2+50X3+0F1+0F2+0F3+0E1+0E2+0E3**

S.a: X1 –E1+A1= 20

X2-E2+A2= 120

X3-E3+A3=60

0.25X1+0.29167X2+0.4167X3 +F1=120

0.333X1+0.4167X2+0.667X3 +F2= 160

0.0833X1 + 0.125X2 + 0.25X3 +F3= 48

Variáveis de não negatividade (X1,X2,X3,F1,F2,F3,E1,E2,E3,A1,A2 e A3 ≥ **0**

VB	X1	X2	X3	E1	E2	E3	F1	F2	F3	A1	A2	A3	VSM
F1	0,25	0,29167	0,4167	0	0	0	1	0	0	0	0	0	120
F2	0,333	0,4167	0,6667	0	0	0	0	1	0	0	0	0	160
F3	0,0833	0,1250	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	48
A1	1,0000	0,0000	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	20
A2	0,0000	1,0000	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	120
A3	0,0000	0,0000	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	60

Agora temos a matriz identidade. A soma de X-E1=20 só se matem, se A1 for igual a zero. Idem para A2 e A3. Tenho que me livrar de A1, A2 e A3. Preciso de A1, A2 e A3= 0,

Utilizando o método simplex têm-se as seguintes etapas:

- ✓ Organize uma função que seja a soma das variáveis artificiais;
- ✓ Minimiza-se esta função utilizando o método simplex;
- ✓ Atingindo o ótimo, ou o mínimo da soma é nulo;
- ✓ Se o mínimo da soma não é nulo conclui-se que o sistema de equação da função não tem solução.

Estes processos são conhecidos com o primeiro passo dos métodos dos dois passos.

Função artificial = Soma das variáveis artificiais

Min F(A)= A1+A2+A3.

No quadro teremos F(A)= -A1-A2-A3=0

VB	X1	X2	X3	E1	E2	E3	F1	F2	F3	A1	A2	A3	VSM
F1	0,2500	0,2917	0,4167	0	0	0	1	0	0	0	0	0	120,00
F2	0,3333	0,4167	0,0667	0	0	0	0	1	0	0	0	0	160,00
F3	0,0833	0,1250	0,2500	0	0	0	0	0	1	0	0	0	48,00
A1	1,0000	0,0000	0,0000	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	20,00
A2	0,0000	1,0000	0,0000	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	120,00
A3	0,0000	0,0000	1,0000	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	60,00
F(A)	0,0000	0,0000	0,0000	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0,00

Análise o quadro acima, e veja se podemos iniciar os cálculos.

Se você pensou que sim, errou. Repare que a soma de A1+A2+A3=200. No quadro estamos a ler F(A)= 0, o que é errado. Isto acontece porque as variáveis estão na base mas não tem coeficientes nulo na equação função. É necessário transformar linearmente a equação da função o que é feito no próprio quadro.

Soma as equações que têm variável artificial à equação da função e nesta obterá coeficiente nulos para as variáveis artificiais , que são variáveis básicas (VB) e o valor da função será 200.

VB	X1	X2	X3	E1	E2	E3	F1	F2	F3	A1	A2	A3	VSM
F1	0,2500	0,2917	0,4167	0	0	0	1	0	0	0	0	0	120,00
F2	0,3333	0,4167	0,0667	0	0	0	0	1	0	0	0	0	160,00
F3	0,0833	0,1250	0,2500	0	0	0	0	0	1	0	0	0	48,00
A1	**1,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**20,00**
A2	**0,0000**	**1,0000**	**0,0000**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**120,00**
A3	**0,0000**	**0,0000**	**1,0000**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**60,00**
F(A)	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**-1**	**0,00**
Soma	1+0+0+0												
F(A)	1	1	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	200,00

Quadro pronto para cálculo.

Entra na base o coeficiente mais positivo, estamos a minimizar, neste caso a escolha é aleatória, pois os coeficiente são positivos e tem o mesmo peso.

Sai da base o menor ratio: A1

VB	X1	X2	X3	E1	E2	E3	F1	F2	F3	A1	A2	A3	VSM
X1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	20
F1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	115
F2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	153
F3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	46
A2	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	120
A3	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	60
F(A)	0,0000	1,0000	1,0	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	180,0

Solução não ótima, pois ainda há coeficiente positivo na equação da função.

Entra na base X2

Sai da Base A2

VB	X1	X2	X3	E1	E2	E3	F1	F2	F3	A1	A2	A3	VSM
X2	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	120,00
X1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	20,00
F1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	115,00
F2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	153,33
F3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	46,33
A3	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	60,00
F(A)	0,0000	0	1	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	0	60,00

Solução não ótima, pois ainda há coeficientes positivos na equação da função.

Entra na base X3

Sai da base A3

VB	X1	X2	X3	E1	E2	E3	F1	F2	F3	A1	A2	A3	VSM
X3	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	60
X2	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	120
X1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	20
F1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	115
F2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	153
F3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	46
F(A)	0,00	0,00	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0,00

Solução ótima, todos os coeficientes da função são não positivos.

Min f(A)= Implica em variáveis artificiais com valor nulo.

A base ótima é a solução do sistema de equação da forma padrão. Vai ser utilizada para otimização da função objetivo.

2º passo otimização da função objetivo;

do modelo maximizar) = **MAX LUCRO) 16X1+30X2+50X3**

O 2º passo é a otimização desta função, aplicando o método simplex na base ótima obtida no final do primeiro passo. As colunas artificiais podem ser eliminadas

VB	X1	X2	X3	E1	E2	E3	F1	F2	F3	VSM
X3	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	60
X2	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	120
X1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	20
F1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	115
F2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	153
F3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	46
F(O)	-16,00	-30,00	-50	0	0	0	0	1	0	0

Análise o quadro podemos iniciar o Cálculo?

Se você responde não acertou. Veja que X1= 20, X2=120 e X3=60, pela que a função objetivo= MAX L= 16*20+30*120+50*30= 6920

No quadro estamos lendo F(o)= 0, o que é errado. Isto acontece porque as variáveis da X1,X2e X3, estão na base mas não tem coeficiente nulo na equação da função. É necessário transformar linearmente a equação da função o que é feito no próprio quadro.

- Ligue os coeficientes a anular as coordenadas das respectivas variáveis básicas, coloque a esquerda destas VB o simétrico do coeficiente que tem em F(o) Multiplique as equações pelos valores situadas a esquerda e some-as a equação da função.

VB	X1	X2	X3	E1	E2	E3	F1	F2	F3	VSM
X1	1	0	0	-1,000	0,000	0,000	0	0	0	20,000
X2	0	1	0	0,000	-1,000	0,000	0	0	0	120,000
X3	0	0	1	0,000	0,000	-1,000	0	0	0	60,000
F1	0	0	0	0,250	0,292	0,417	1	0	0	54,994
F2	0	0	0	0,333	0,417	0,667	0	1	0	63,298
F3	0	0	0	0,083	0,125	0,250	0	0	1	16,334
F(o)	-16	-30	-50	0	0	0	0	0	0	0
soma	16*1+30*0+50*0-16									
F(o)	0,000	0,000	0,000	(16,000)	(30,000)	(50,000)	0	0	0	6920

Esta solução não é ótima, pois há coeficientes negativos na linha da função objetivo.

Entra na base E3 e sai da base F3.

VB	X1	X2	X3	E1	E2	E3	F1	F2	F3	VSM
E3	0,000	0,000	0,000	0,333	0,500	1,000	0,000	0,000	4,000	65,336
F2	0,000	0,000	0,000	0,111	0,0835	0,000	0,000	1,000	-2,668	19,719
F1	0,000	0,000	0,000	0,111	0,083	0,000	1,000	0,000	-1,668	27,749
X1	1,000	0,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	20,000
X2	0,000	1,000	0,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	120,000
X3	0,000	0,000	1,000	0,333	0,500	0,000	0,000	0,000	4,000	125,336
F(x)	0	0	0	0,66	-5	0	0	0	200	10.186,8

Solução não ótima, pois ainda há coeficientes negativos na linha da função objetivo.

Entra na base E2 e sai da base E3

VB	X1	X2	X3	E1	E2	E3	F1	F2	F3	VSM
F3	0	0	0	0,666	1,000	2,000	0,000	0,000	8,000	130,672
F2	0	0	0	0,055	0,000	-0,167	0,000	1,000	-3,336	8,88
F1	0	0	0	0,056	0,000	-0,166	1,000	0,000	-2,332	16,903
X1	1	0	0	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	20,000
X2	0	1	0	0,666	0,000	2,000	0,000	0,000	8,000	250,672
X3	0	0	1	0,000	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	60,000
F(x)	0	0	0	3,99	0,00	10,00	0,00	0,00	240,00	10.840,16

Solução ótima encontrada: Produzir X1= 20, X2=250,672 e X3=60, gerando um lucro máximo de R$ 10.840,16.

Repare que temos F1=16,903, ou seja, está sobrando na fabricação dos produtos.

F3= 0, ou seja foram utilizadas todas as horas disponíveis para embalar os produtos.

F2= 8,88, ou seja, esta sobrando 8,88 horas no departamento de montagem.

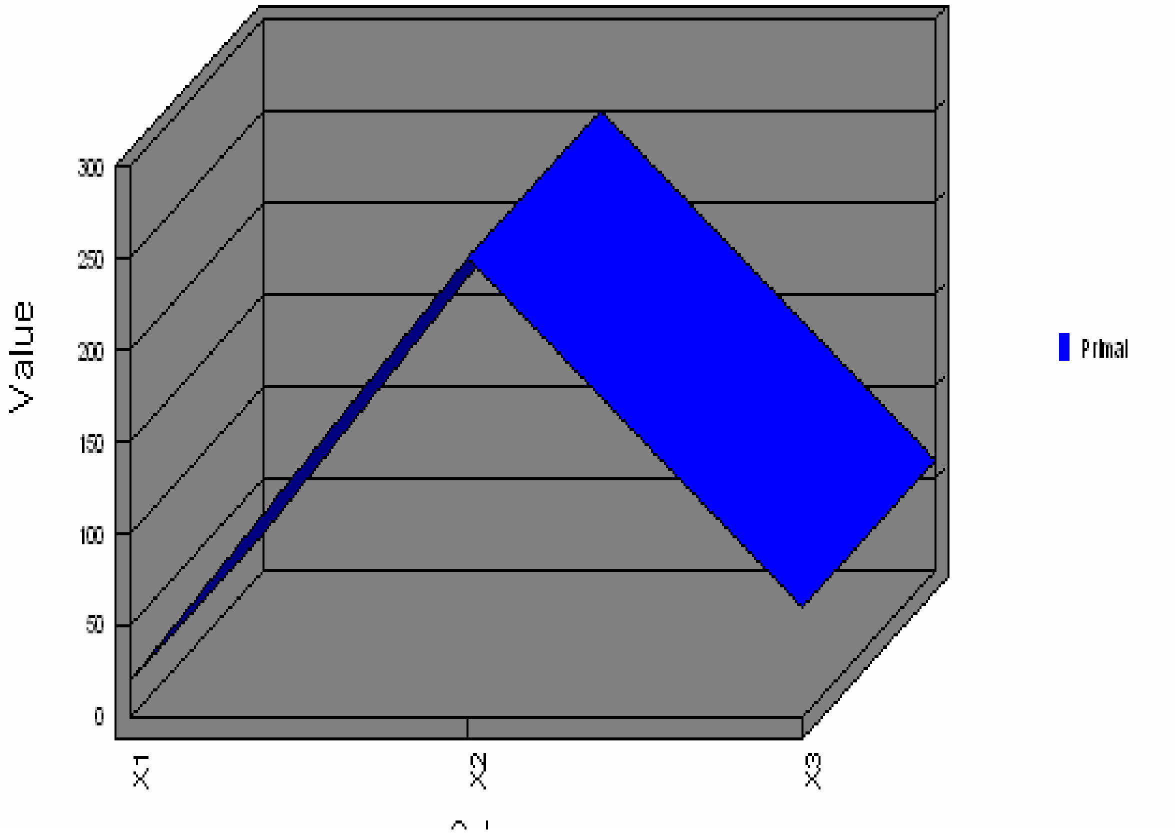
Realizando uma análise Algébrica têm-se

$F1= 0.25*(20)+0.29167(250,672)+0.4167*(60) = 103 \leq 120 \Rightarrow$ Folga= 16,903Hrs

$F2=0.333*(20)+0.4167*(250,672)+0.6667*(60)= 1 \leq 160 \Rightarrow$ Folga=8,88horas

$0.0833*(20) + 0.125*(250,267) + 0.25*(60)= 48 \leq 48 \Rightarrow$ Folga =0

NOTA: Ao se introduzir o conceito de folga de recurso, a inequação pode ser escrita como Utilização de recurso + Folga = Disponibilidade. Isso significa que Utilização de recurso < Disponibilidade implica Folga > 0; Utilização de recurso = Disponibilidade implica Folga = 0. Deste modo, a folga de cada recurso pode ser representada por uma variável de forma exatamente igual à produção de cada produto.



Este gráfico nós mostra o valor de X1, X2 e X3.

Dualidade

As variáveis duais podem receber uma interpretação econômica muito interessante, que leva ao cálculo da utilidade margina (preço de sombra, Dual price, valor marginal etc.)

O problema dual, para modelos em que as restrições são de desigualdades do tipo ≤ é construído a partir de um modelo primal.

1. Cada restrição, em um problema corresponde a uma variável no outro;
2. Os elementos do lado direito das restrições, em um problema, são coeficientes da função objetivo do outro problema;
3. Se o objetivo de um problema primal é maximizar o objetivo do problema dual ser minimizar e assim vice e versa.
4. O problema de maximização primal tem restrições do tipo (≤) o problema dual de minimização terá as restrições inversa, ou seja ≥
5. As variáveis de ambos os problemas são não negativas.

Problema Primal

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = \{1,2,\ldots,m\}$$

$$\text{e} \quad x_j \geq 0 \qquad j = \{1,2,\ldots,n\}$$

Notação Matricial

$$\text{Max} \quad Z = cx$$

$$\text{Sujeito a} \quad Ax \leq b$$

$$\text{e} \quad x \geq 0$$

Problema Dual

$$\text{Min} \quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad j = \{1,2,\ldots,n\}$$

$$\text{e} \quad y_i \geq 0 \qquad i = \{1,2,\ldots,m\}$$

Notação Matricial

$$\text{Min} \quad W = yb$$

$$\text{Sujeito a} \quad yA \geq c$$

$$\text{e} \quad y \geq 0$$

Exemplo:

Problema Primal

$$\text{Max} \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

Sujeito a

$$\begin{cases} x_1 & & \leq & 4 \\ & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + \; 2x_2 & \leq & 18 \end{cases}$$

$$x_1 \;\text{ e }\; x_2 \geq 0$$

Notação Matricial

$$\text{Max} \quad Z = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema Dual

$$\text{Min} \quad W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

Sujeito a

$$\begin{cases} y_1 & + & & 3y_3 & \geq & 3 \\ & & 2y_2 \; + & 2y_3 & \geq & 5 \end{cases}$$

$$y_1, \; y_2 \;\text{ e }\; y_3 \geq 0$$

Notação Matricial

$$\text{Min} \quad W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \quad \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo Primal

MAX LUCRO) 16X1+30X2+50X3

S.a:

F1)0.25X1+0.29167X2+0.4167X3<=120

F2)0.333X1+0.4167X2+0.6667X3<=160

F3)0.0833X1 +0.125X2 +0.25X3<=48

X1 >=20

X2 >=120

X3 >=60

Variáveis de não negatividade X1,X2 e X3>=0

Modelo DUAL

Min Z)120y1+ 160y2+48y3-20y4-120y5-60y6

S.a:

0.25y1+0.333y2+0.0833y3-y4>=16 Incremento no depart Fabricação

0.29167y1+0.4167y2+0.125y3-y5>=30 Incremento no depart Montag

0.4167y1+0.6667y2+0.25y3-y6>=50 Incremento no Depart Embal

Variáveis de não negatividade (y1………y6>=0)

Admita-se que em ambiente de maximização $F(x)=c1x1+a12x2$, as restrições primal: $a11x1+a12x2 \geq b1$

A desigualdade do tipo ≤ é:

| $-a11-a12x2 \leq -b1$

A que está associada a variável dual $Y1 \geq 0$

- A primeira restrição dual é $-a11y1$............ $\geq c1$
- A segunda restrição dual: $-a12y1$............... $\geq c2$
- E na função dual $g(y) =-b1y1$....

Considerando que $Y1=-Y1 \leq 0$ as expressões anteriores ficam:

- 1º restrição dual: $a11y1$............ $\geq c1$
- 2º restrição dual: $a12y1$............... $\geq c2$
- E na função dual $g(y) =b1y1$....
- $Y1 \leq 0$ (não positiva)

Pode assim concluir que, em ambiente de maximização, a cada restrição primal do tipo corresponde uma variável dual não positiva (≤ 0).

	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Z7	Z8	Z9	VSM
	0,25000	0,33300	0,08330	-1,0	0,00	0,0	1	0	0	16,0
	0,29167	0,41670	0,12500	0,0	-1,00	0,0	0	1	0	30,0
	0,41670	0,66670	0,25000	0,0	0,00	-1,0	0	0	1	50,0
F(Y)	120,0	160,0	48,0	-20,0	-120	-60	0	0	0	0,0

Função objetivo transformada de Max (y), para Max (-y)= -120y1-160y2-48y3+20y4+120y5+60y6.

As restrições técnicas: passam para:

-0.25y1-0.333y2-0.0833y3+y4+Z7>=-16

-0.29167y1-0.4167y2-0.125y3+y5+Z8>=-30

-0.4167y1-0.6667y2-0.25y3+y6+Z9>=-50

	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	z7	z8	z9	VSM
	-0,3	-0,3	-0,1	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	-16,0
	-0,3	-0,4	-0,1	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	-30,0
	-0,4	-0,7	-0,3	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	-50,0
F(Y)	-120,0	-160,0	-48,0	20,0	120,0	60,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Para iniciar o cálculo do método dual através do simplex, deve-se tirar uma variável da base e colocar uma variável na base.

- A variável que sai: é a variável básica com o valor mais negativo. Se todas as variáveis básicas tiverem valores positivos à solução é ótima. Neste caso as variáveis básicas Z_7 = 16 , Z8= -30 e Z9=-50, são negativas, portanto a solução inicial e inviável ou não ótima. Logo sai da base Z9

- A Variável que entra: é escolhida entre as variáveis fora da base, da seguinte maneira:

1. Dividir os coeficientes do lado esquerdo da equação F(Y) transformada pelos correspondentes coeficientes negativos da equação da variável que sai da base.
2. a variável que entra é a que tem o menor valor entre os quocientes encontrados (problemas de minimização) ou o menor valor absoluto (problemas de maximização).

Quando em ambos os casos, não houver coeficiente negativos na linha da variável que sai da base, o problema não tem solução viável.

Ratio: -120/-0,4= 287,97

-160/-0,7=239,98

48/-0,3 =192

Entra na base Y3

.

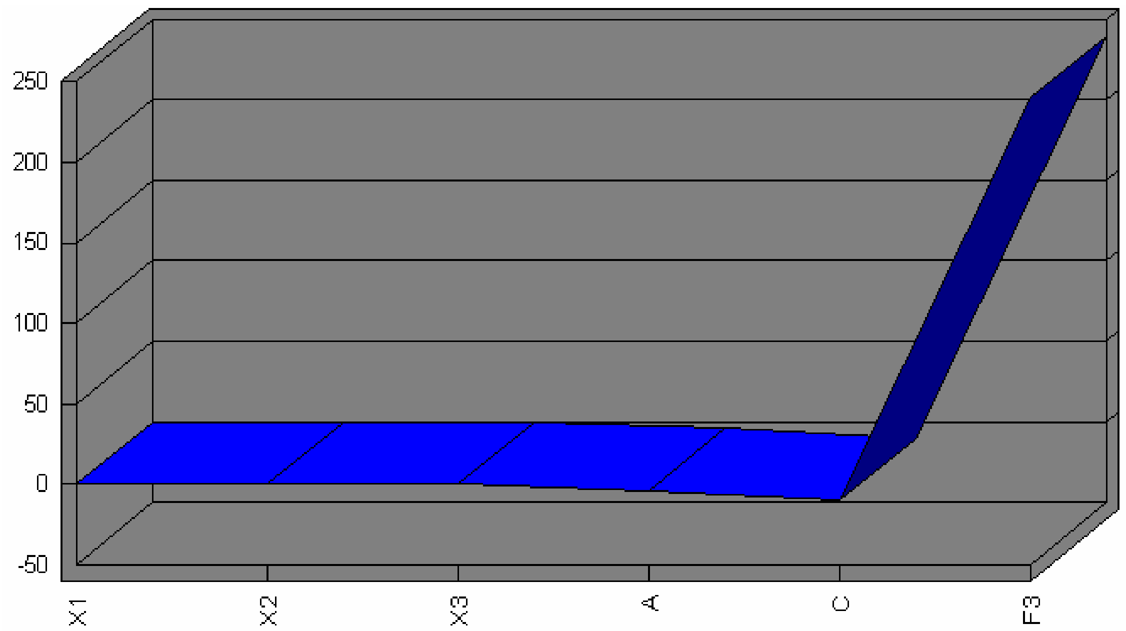
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	VSM
	1,667	2,667	1,000	0,000	0,000	-4,000	0,000	0,000	-4,000	200,000
	-0,111	-0,111	0,000	1,000	0,000	-0,333	1,000	0,000	-0,333	0,660
	-0,083	-0,083	0,000	0,000	1,000	-0,500	0,000	1,000	-0,500	-5,000
F(Y)	- 39,994	- 31,994	0,000	20,000	120,000	- 132,000	0,000	0,000	- 192,000	9600,000

Solução não ótima, pois há valores negativos na coluna VSM.

Sai da base Z8e entra na base Y6

	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	z7	z8	z9	VSM
	0,167	0,167	0,000	0,000	-2,000	1,000	0,000	-2,000	1,000	10,000
	-0,056	-0,05	0,000	1,000	-0,666	0,000	1,000	-0,666	0,000	3,992
	2,333	3,334	1,000	0,000	-8,000	0,000	0,000	-8,000	0,000	240,000
F(Y)	- 17,997	- 9,989	0,000	20,000	-144,	0,000	0,000	-264,0	-60,0	10840,160

Solução ótima: Se a empresa conseguir aumentar em 1 hora a disponibilidade de horas no departamento de embalagens o lucro aumentaria para em R$ 240,00 reais. Se fosse produzido em uma unidade a mais do produto x3 o lucro reduziria em R$ 10,00, se fosse produzido o produto X1 em uma unidade a mais o lucro iria reduzir em R$ 3,99 reais. Esta disponibilidade de hora incremental no departamento de embalagens, seria apenas para embalar o produto B.



Este gráfico demonstra que se for aumentado em uma hora à disponibilidade máxima de horas no departamento de embalagem (F3), o lucro aumentaria em R$ 240,00 reais.

Análise de Pós Otimização ou Sensibilidade

A análise de pós-otimização ou de sensibilidade tem como objetivo determinar as condições para as quais a solução ótima é Válida. No mundo real a solução ótima encontrada, pode não ser a melhor, pois, a demanda pode sofrer alterações o custo do produto dentre outras variáveis, demonstrando o quão importante é análise de sensibilidade para orientar a tomada de decisão, caso alguma destas variáveis sofram alterações no tempo.

Tomando com base o exercício anterior , vamos realizar as seguintes análises:

Função Objetivo: MAX LUCRO) 16X1+30X2+60X3

Restrições técnicas

X1 ≥ 20 Exigências mínimas de produção do modela A

X2 ≥ 120 Exigências mínimas de produção do modela B

X3 ≥ 60 Exigências mínimas de produção do modela C

0.25X1+0.29167X2+0.4167X3 ≤ 120 Disponibilidade de horas Fabricação

0.333X1+0.4167X2+0.6667X3 ≤ 160 Disponibilidade de horas Montagem

0.0833X1 + 0.125X2 + 0.25X3 ≤ 48 Disponibilidade de horas embalagem

Variáveis de não negatividade (x1,x2,X3>=0)

1º Variações no coeficiente da função objetivo:

De F(O)= 16X1+30X2+50X3

Para 20x1+35x2+50x3

Vamos obter X1=20, X2=250,672 e X3= 0

Isto nos mostra que para estes novos coeficientes a solução ainda é ótima, pois os coeficientes de X1, X2 e X3 não sofreram alteração.

Agora imaginemos que os coeficientes da função objetivos sofram as seguintes modificações: X1=10, X2=24, X3=61

X1 =20, X2 =120 e X3= 125.335999 . Isto nos mostra que o valor do coeficiente X3=61 na função objetivo, gera uma solução inviável, pois proporcionou mudanças na função objetivo.

Resolução pelo Ms-Excel

	A	B	C	D
1	*Variáveis de Decisão*			
2	X1	0		
3	X2	0		
4	X3	0		
5	Função Objetivo MAX L	-		
6	Restrições Técnicas			
7	Disponibilidade de horas no depart Fabricação	0	<=	120
8	Disponibilidade de horas no depart Montagem	0	<=	160
9	Disponibilidade de horas no depart Embalagem	0	<=	48
10	Mínimo a ser produzido de X1	0	>=	20
11	Mínimo a ser produzido de X2	0	>=	120
12	Mínimo a ser produzido de X3	0	>=	60

Modelagem dos dados é feita da seguinte maneira:

A2= X1 B2 = 0

A3= X2 B3=0

B4=0 B4=0

Na célula A5, escreva função objetivo e na cédula B5 vamos inserir a fórmula matemática, tendo: B5 (16*B2+30*B3+50*B4),

Restrições técnicas:

B7 (=0,25*B2+0,29167*B3+0,4167*B4), modelo matemática da restrição do departamento de fabricação.

B8 (=0,333*B2+0,4167*B3+0,6667*B4), modelo matemática da restrição do departamento de montagem.

B9 (=0,0833*B2+0,125*B3+0,25*B4), Modelo matemática da restrição do departamento de Embalagem.

B10 (=B2), => Mínimo de produção de X1

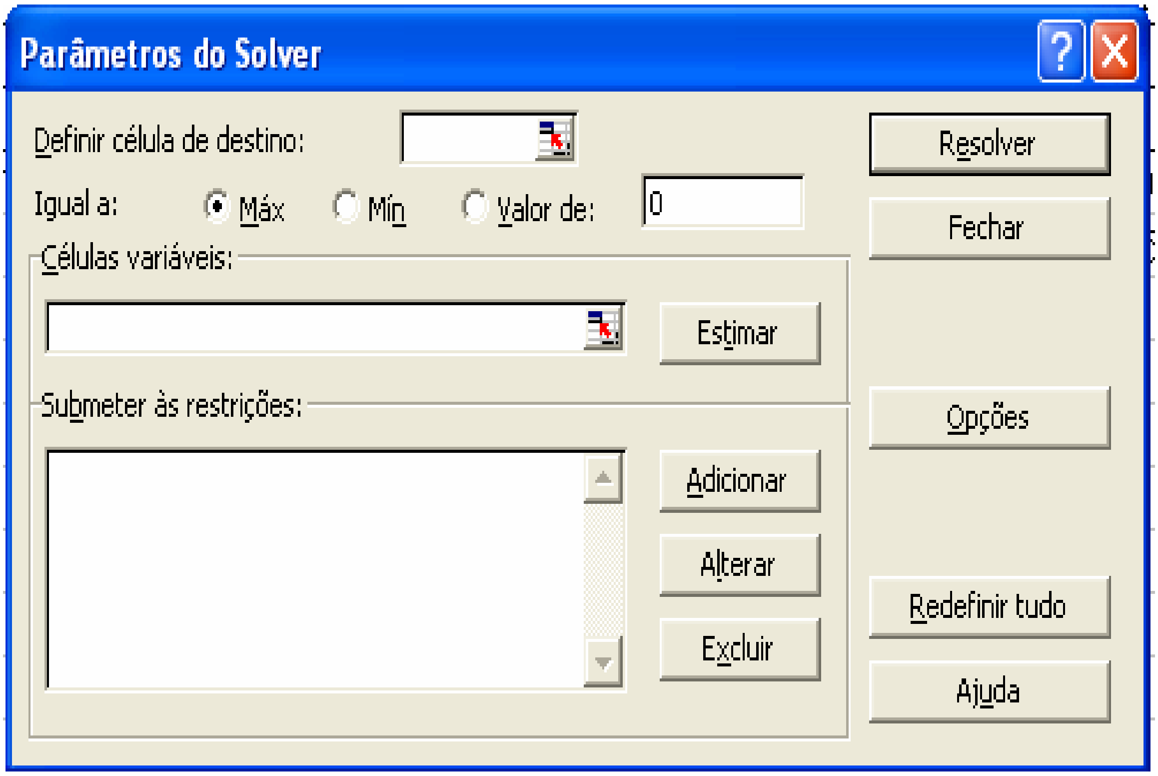
B11(= B3)=> Mínimo de produção de X2

B12 (=B4)=> Mínimo de Produção de X3

Nas colunas C e D , inseria os dados como mostra a figura acima.

Agora, vamos instalar a Ferramenta solver, para isso vá ao menu ferramenta, e clique em Solver. Caso não encontre é preciso instalar esta ferramenta, para isso vá ao menu ferramentas e clique em suplementos e habilite a ferramenta solver.

A figura abaixo mostra a janela de entrada do Solver.



- Definir Célula de Destino, neste campo aloca-se a expressão matemática da função objetivo;

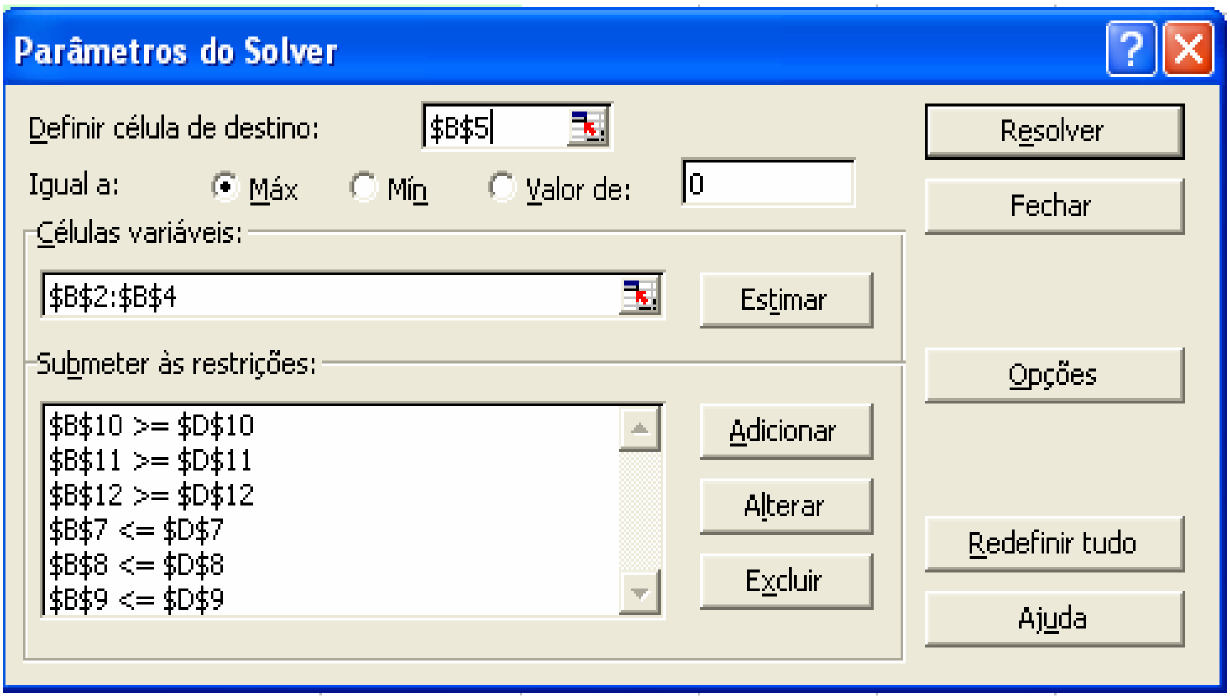
- Logo abaixo temos 3 opções, se o problema for de maximização marque a opção Max, caso seja de minimização, marque a opção min ou caso queria estipular um valor para a função objetivo marque a opção valo de é depois insira o valor desejado no campo ao lado;

- No campo Célula de destino insira o valor das variáveis de decisão;

- E finalmente no último campo insira a expressão matemática das restrições técnicas.

	A	B	C	D
1	***Variáveis de Decisão***			
2	X1	20		
3	X2	250,672		
4	X3	60		
5	Função Objetivo MAX L	10.840,16		
6	Restrições Técnicas			
7	Disponibilidade de horas no depart Fabricação	103,1155	<=	120
8	Disponibilidade de horas no depart Montagem	151,11702	<=	160
9	Disponibilidade de horas no depart Embalagem	48	<=	48
10	Mínimo a ser produzido de X1	20	>=	20
11	Mínimo a ser produzido de X2	250,672	>=	120
12	Mínimo a ser produzido de X3	60	>=	60

A janela abaixo mostra como devem ser inseridos os dados do problema.

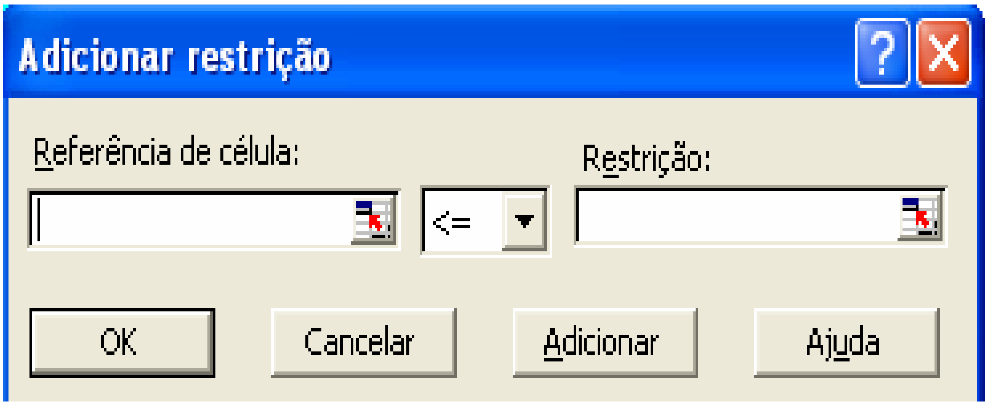


No campo Célula de Destino Inseria a Célula B5, pois foi nesta célula que inserimos a expressão matemática da função objetivo.

- Como queremos maximizar o lucro, marque a opção MAX.

- No campo Células variáveis, insira as Células B2;B3;B4, pois estas células estão contidas as variáveis de decisão do problema, que é maximizar X1,X2 e X3.

- No campo Submeter às restrições, basta seguir os passos acima, Inserindo as restrições na janela abaixo, tomando cuidado para não inserir as restrições com sinais trocados. No campo referência de Célula, insira o modelo matemático da restrição e no campo restrição insira o termo independente da restrição ,ou seja, a disponibilidade.



Depois de feito todos os processos descritos acima, obteremos os seguintes resultados.

	A	B	C	D
1	***Variáveis de Decisão***			
2	X1	20		
3	X2	250,672		
4	X3	60		
5	**Função Objetivo MAX L**	**10.840,16**		
6	Restrições Técnicas			
7	Disponibilidade de horas no depart Fabricação	103,1155	<=	120
8	Disponibilidade de horas no depart Montagem	151,11702	<=	160
9	Disponibilidade de horas no depart Embalagem	48	<=	48
10	Mínimo a ser produzido de X1	20	>=	20
11	Mínimo a ser produzido de X2	250,672	>=	120
12	Mínimo a ser produzido de X3	60	>=	60

Solução Ótima: Produzir X1= 20, X2=250,672 e X3= 60, Gerando um lucro máximo de R$ 10.840,16 reais.

Relatórios do MS- EXCEL

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$5	Função Objetivo MAX L	0	10840,16

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$2	X1	0	20
$B$3	X2	0	250,672
$B$4	X3	0	60

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$B$7	Disponibilidade de horas no depart Fabricação	103,1155022	$B$7<=$D$7	Sem agrupar	16,88449776
$B$8	Disponibilidade de horas no depart Montagem	151,1170224	$B$8<=$D$8	Sem agrupar	8,8829776
$B$9	Disponibilidade de horas no depart Embalagem	48	$B$9<=$D$9	Agrupar	0
$B$10	Mínimo a ser produzido de X1	20	$B$10>=$D$10	Agrupar	0
$B$11	Mínimo a ser produzido de X2	250,672	$B$11>=$D$11	Sem agrupar	130,672
$B$12	Mínimo a ser produzido de X3	60	$B$12>=$D$12	Agrupar	0

O Primeiro relatório é o de resposta, onde nos mostra o valor da função objetivo maximizada e o valor das variáveis de decisão. Na última planilha contém o consumo de cada restrição, caso há folga ou sobras, ou seja, a disponibilidade do recurso não foi totalmente consumida. A coluna Transigência, mostra o valor das folgas de cada recurso, onde podemos observar que o recurso, disponibilidade de horas no departamento de fabricação não foi totalmente consumida sobrando 16,88 horas e no departamento de embalagem as hora foram totalmente consumidas, logo podemos perceber que há restrição deste departamento impede que o lucro da empresa seja superior ao atual, pois temos folga nas outras restrições.

O segundo relatório e o de sensibilidade.

	A	B	C	D	E	F	G	H
6	Células ajustáveis							
7				Final	Reduzido	Objetivo	Permissível	Permissível
8		Célula	Nome	Valor	Custo	Coeficiente	Acréscimo	Decréscimo
9		$B$2	X1	20	0	16	3,992	1E+30
10		$B$3	X2	250,672	0	30	1E+30	5
11		$B$4	X3	60	0	50	10	1E+30

Está janela nos mostra o valor da função objetivo e valor das variáveis de decisão. Na coluna permissível acréscimo, nos mostra que o máximo de variação que a variável X1 do coeficiente da função objetivo pode variar, em outras palavras o número 3,992, demonstra que o máximo lucro unitário de X1, pode elevar no Máximo 3,992 sem que alterar o valor final. O coeficiente X2 da função objetivo pode ser reduzido no máximo para 5, ou seja, de 30 para 25, este seria o máximo de desconto que a empresa poderia oferecer para seu cliente, sem alterar o valor final, ou seja, apresentando X2=250,672.

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$B$7	Disponbilidade de horas no depart Fabricação	103,1155022	0	120	1E+30	16,88449776
$B$8	Disponbilidade de horas no depart Montagem	151,1170224	0	160	1E+30	8,8829776
$B$9	Disponbilidade de horas no depart Embalagem	48	240	48	2,664680106	16,334
$B$10	Mínimo a ser produzido de X1	20	-3,992	20	160,600212	1E+30
$B$11	Mínimo a ser produzido de X2	250,672	0	120	130,672	1E+30
$B$12	Mínimo a ser produzido de X3	60	-10	60	65,336	53,28720816

A coluna preço de Sombra, mostra o preço dual, ou seja, quanto o lucro da empresaria aumentaria se fosse adicionado uma unidade a mais de recursos para produção dos produtos. Veja que se a disponibilidade de horas do departamento de embalagem fosse aumentada em 1 hora o lucro aumentaria em R$ 240,00 reais. Perceba que se fosse produzido uma unidade a mais dos produtos X3 e X1, o lucro iria reduzir para R$ -3,9992 e R$ -10,00 respectivamente.

Nas colunas acréscimo e decréscimo, demonstram qual é o valor máximo que as restrições podem oscilar sem alterar o valor ótimo. Tomando como base as linhas de disponibilidade de horas no departamento de fabricação e montagem, podemos perceber que os máximos que estas restrições podem reduzir São: 16,88 horas e 8,88 horas, que são as respectivas folgas.

E finalmente o último relatório e o de limite

Célula	Nome	Valor
$B$5	Função Objetivo MAX L	10840,16

	Ajustável		Inferior	Destino	Superior	Destino
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
$B$2	X1	20	20	10840,16	20	10.840,16
$B$3	X2	250,672	120	6.920,00	250,672	10.840,16
$B$4	X3	60	60	10840,16	60	10.840,16

Este relatório nos mostra qual seria a solução ótima do problema caso o problema fosse de minimização e caso fosse de maximização.

Na coluna limite Inferior X1=20, X2=120 e X3=60, Apresentaria um lucro minimo de R$ 6.920,00, caso o problema fosse de minimização. A coluna Superior limite mostra o valor da solução ótima caso o problema fosse de maximização, tendo X1=20, X2=250,672 e X3= 60. Gerando um lucro máximo de R$ 10.840,16