O Senhor Z é dono de uma oficina muito movimentada na cidade de Y. Ele querendo maximizar seus retornos e também, visando à realização de novos investimentos na sua oficina. Resolveu procurar você/SA, para fazer um planejamento da sua produção, visando a maximização do seu lucro e identificar possíveis áreas para realização de novos investimentos. Os dados da empresa estão logo abaixo:

Uma oficina mecânica deseja alocar o tempo ocioso disponível em suas máquinas para a produção de 3 produtos. A tabela abaixo dá as informações sobre as necessidades de horas de máquina para produzir uma unidade de cada produto, assim como a disponibilidade das máquinas, o lucro dos produtos e a demanda máxima existente no mercado. Deseja-se o esquema semanal de produção de lucro máximo?

Tipo de Máquina	**Produto 1**	**Produto 2**	**Produto 3**	**Tempo disponível**
Torno	5	3	5	400
Fresa	8	4	0	500
Furadeira	2	5	3	300
Lucro	20	15	18	
Demanda Semanal máxima	40	50	20	

Nota: Este problema será resolvido através da pesquisa operacional, onde utilizarei técnicas de programação matemática, sobretudo a programação linear. Inicialmente resolverei pela fórmula Algébrica e depois pelo MS-Excel.

Todo o problema de programação linear é caracterizado por apresentar restrições e funções lineares. Como mostra a figura abaixo:

Maximizar (ou minimizar)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \text{ (ou} \geq \text{, ou} =)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \text{ (ou} \geq \text{, ou} =)$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \text{ (ou} \geq \text{, ou} =)$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Figura1: Modelagem da programação linear

Z= c1 x1 + c2 x2 + …+ cn xn designa-se por função objetivo (f.o.).

Aix1+....................anxn designa as restrições técnicas

X1,x2...................xn designa as variáveis de decisão

O primeiro passo de toda a modelagem matemática e selecionar as variáveis de decisão que no nosso caso vamos chamar de x1, x2 e x3

Sendo x1=> Quantidade a ser produzida/vendida do Produto 1

x2=> Quantidade a ser Produzida/Vendida do Produto 2

x3=> Quantidade a ser Produzida/Vendida do Produto 3

O 2° Passo modelar a função objetivo, como Senhor Z deseja maximizar o lucro, portanto a função objetivo do estudo em questão e:

Função Objetivo MAX L = 20x1+15x2+18x3

O 3° Passo a modelagem das restrições técnicas

5x1+3x2+5x3<=400 (Horas disponíveis no torno)

8x1+4x2<=500 (Horas Disponíveis na Fresa)

2x1+5x2+3x3<=300(Horas disponíveis na Furadeira)

X1<=40 (Demanda Máxima semanal de P1)

X2<=50 (Demanda Máxima Semanal de P2)

X3<=20 (Demanda Máxima Semanal de P3)

Variáveis de não negatividade X1, X2 e x3 ≥ 0 (Condição que deve ser produzir)

MODELO NA FORMA PADRÃO DO SIMPLEX

MAX L= 20x1+15x2+18x3+0f1+0f2+0f3+0f4+0f5+0f6+0f7

Sujeito a:

5x1+3x2+5x3+f1=400

8x1+4x2+f2=500

2x1+5x2+3x3+f3=300

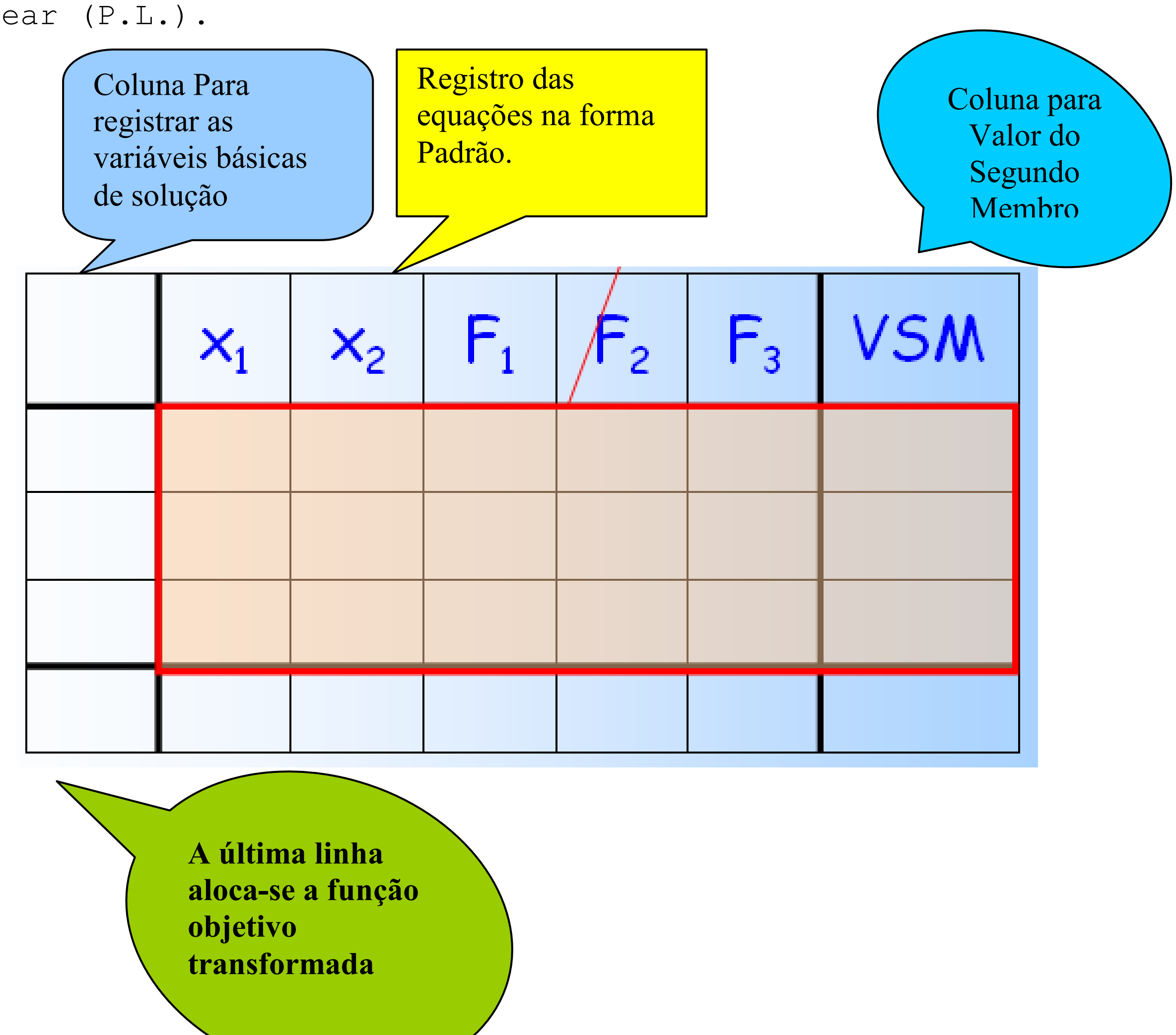
x1+F4=40

x2+F5=50

x3+F6=20

Variáveis de não negatividade X1 e X2 ≥ 0

O método simplex foi criado pelo matemático George Dantiz, conhecido como o pai da programação linear. Em 1947, **George Dantzig** com a colaboração de Koopmans, ambos a trabalhar no Departamento da Força Aérea Americana, apresentaram um método denominado **Simplex** para a resolução dos problemas de Programação Linear (P.L.).



A função objetiva sofre uma transformação de MAX L= 20x1+15x2+18x3. PARA Z-20x1-15x2-18x3

Solução Inicial

Tabela 1:

VB	X1	X2	X3	F1	F2	F3	F4	F5	F6	VSM
	5	3	5	1	0	0	0	0	0	400
	8	4	0	0	1	0	0	0	0	500
	2	5	3	0	0	1	0	0	0	300
	1	0	0	0	0	0	1	0	0	40
	0	1	0	0	0	0	0	1	0	50
	0	0	1	0	0	0	0	0	1	20
F(X)	-20	-15	-18	0	0	0	0	0	0	0

A solução inicial mostra que não esta sendo produzido nenhum dos produtos (X1,X2 e X3=0), e esta sobrando F1=400, F2=500, F3=300, F4=40, F5=50 e F6=20. Claramente esta não é a solução ótima, pois a própria função objetivo nos mostra que é viável a produção.

- **Os vetores das VB formam sempre uma Matriz Identidade**
- **AS VB têm sempre coeficiente nulo na equação de (FX)**
- **O Valor das VB, F1,F2,F3 ,F4,F5 e F6 e lido diretamente na coluna VSM**
- **O valor de F(x) é lido diretamente na coluna VSM**

Nota: A solução ótima e adquirida quando se obtém Máximo no caso de problemas de maximização e F(x) mínimo no caso de minimização.

2° solução: Devemos escolher uma variável para entrar na base e outra para sair da base. O critério de escolha da variável que sai da base é a que apresentar o maior valor negativo e sai da base a variável de menor ratio.

VB	X1	X2	X3	F1	F2	F3	F4	F5	F6	VSM	Ratio
	5	3	5	1	0	0	0	0	0	400	80
	8	4	0	0	1	0	0	0	0	500	65,50
	2	5	3	0	0	1	0	0	0	300	150
	1	0	0	0	0	0	1	0	0	40	40
	0	1	0	0	0	0	0	1	0	50	0
	0	0	1	0	0	0	0	0	1	20	0
F(X)	-20	-15	-18	0	0	0	0	0	0	0	0

Entra na base (X1)

Qual variável sai da base

Deve sair da base a variável que oferece a menor "ratio" não negativa

Neste caso sai da base F4

Esta é a razão porque o Simplex só gera soluções admissíveis (satisfazem todas as restrições)

Introduza X1 no subsistema desta equação para estudar a solução:

1) 5x1+f1=400 => X1=400/5= 80
2) 8x1+F2=500=>X1=500/8= 62,50
3) 2x1+F3=300=> X1=300/2=150
4) X1+F4=40= X1=40/1=40 ⇨ F4 sai da base.

Quando se fala que uma variável entra na base significa que vamos produzir somente ela. E quando uma variável sai da base significa que vamos consumir todos os recursos desta variável.

Tabela da segunda Solução 2

VB	X1	X2	X3	F1	F2	F3	F4	F5	F6	VSM
	0,00	3,	5,00	1,00	0,00	0,00	-5	0,00	0,00	200
	0	4	0	0	1	0	-8	0	0	180
	0	5	3	0	0	1	-2	0	0	220
	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**40**
	0	1	0	0	0	0	0	1	0	50
	0	0	1	0	0	0	0	0	1	20
F(X)	**0**	-15	-18	0	0	0	20	0	0	800

Na segunda solução a oficina mecânica vai produzir apenas X1 (P1) na quantidade de 40 unidades e gerando um lucro máximo de R$ 800,00. Porém esta sobrando F6=20, ou seja, não estão atendendo a demanda do produto P3 (x3) e nem a demanda do produto P2(X2)=50, sobrando em estoque F1=220 horas (furadeira) disponíveis para fabricação dos demais produtos, F2=180 horas (fresa) também para fabricação dos produtos e F1= 200 horas (torno) para a fabricação dos produtos. Percebe-se que esta não é a única solução ótima para este exercício.

NOTA: para encontrar tabela 2, basta multiplicar a linha (4) x o coeficiente de X1 na tabela 1 (+) as linhas deste coeficiente. Exemplo para achar a linha 1 da tabela 2, multiplica a linha pivô(a mesma esta em negrito) x a primeira linha da tabela 1 de forma a zerar X1 desta linha, ou seja, 1x-5+5 e assim sucessivamente para todos.

3° Solução

Entra na base X3, pois possuiu o maior valor negativo, e sai da base F6, pelo fato de ter o menor ratio.

VB	**X1**	X2	**X3**	F1	F2	F3	F4	F5	F6	VSM
	0,00	3,	**5,00**	1,00	0,00	0,00	-5	0,00	0,00	200
	0	4	**0**	0	1	0	-8	0	0	180
	0	5	**3**	0	0	1	-2	0	0	220
	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**40**
	0	1	**0**	0	0	0	0	1	0	50
	0	0	**1**	0	0	0	0	0	1	20
F(X)	**0**	-15	**-18**	0	0	0	20	0	0	800

Tabela 3: Terceira Solução

VB	**X1**	X2	**X3**	F1	F2	F3	F4	F5	F6	VSM
	0	3	**0**	1	0	0	-5	0	-5	100
	0	4	**0**	0	1	0	-8	0	0	180
	0	5	**0**	0	0	1	-2	0	-3	160
	1	0	**0**	0	0	0	1	0	0	40
	0	1	**0**	0	0	0	0	1	0	50
	0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**20**
F(X)	**0**	-15	**0**	0	0	0	20	0	18	1160

Nesta solução a empresa esta produzindo apenas X1=40 e X3=20, gerando um lucro Máximo de R$ 1.160. Sobrando folga F1=100,F2=180 e F3=160, ficando evidente que é viável produzir o produto X2, pois temos recursos para isso.

4° Solução

VB	**X1**	X2	**X3**	F1	F2	F3	F4	F5	F6	VSM
	0	3	**0**	1	0	0	-5	0	-5	100
	0	4	**0**	0	1	0	-8	0	0	180
	0	5	**0**	0	0	1	-2	0	-3	160
	1	0	**0**	0	0	0	1	0	0	40
	0	1	**0**	0	0	0	0	1	0	50
	0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**20**
F(X)	**0**	-15	**0**	0	0	0	20	0	18	1160

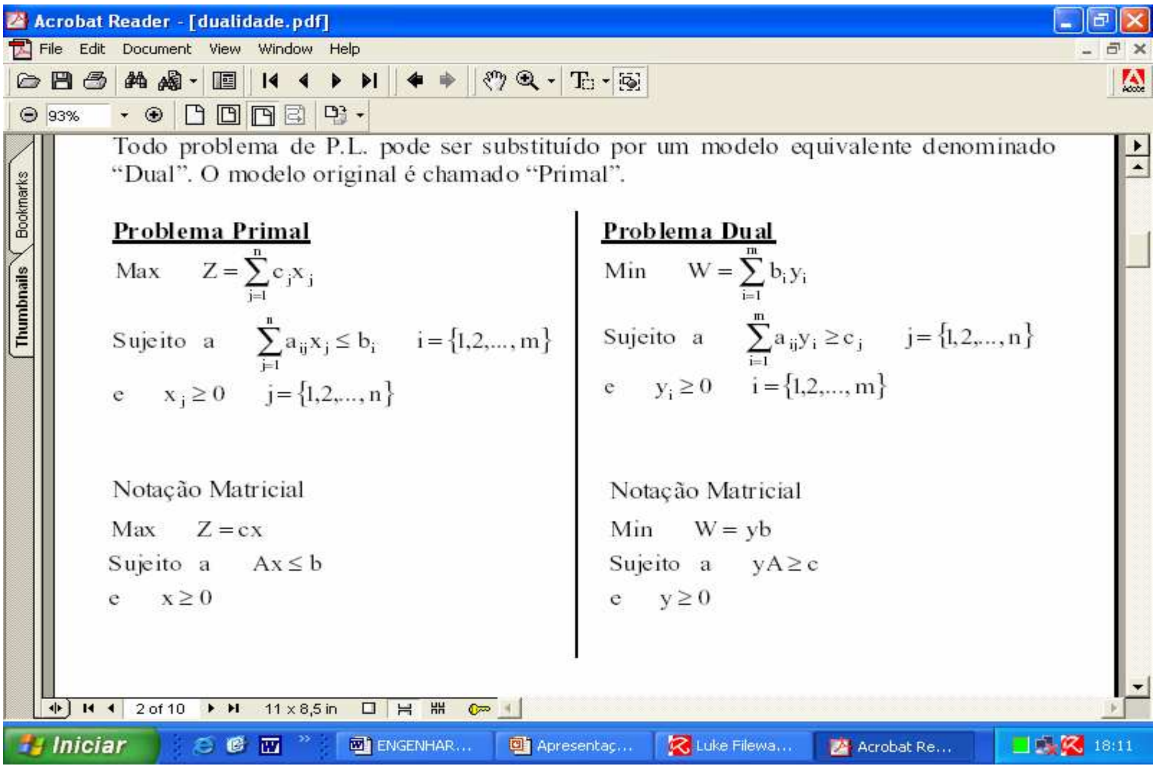
Entra na base X2, ou seja, vou produzir P2 e sai da base F3

Tabela 4:

VB	X1	X2	X3	F1	F2	F3	F4	F5	F6	VSM
	0	0	0	1	0	-1	-4	0	-3	4
	0	0	0	0	1	-0,8	-6,4	0	2,4	52
	0	1	0	0	0	0,2	-0,4	0	-0,6	32
	1	0	0	0	0	0	1	0	0	40
	0	0	0	0	0	-0,2	0,4	1	0,6	18
	0	0	1	0	0	0	0	0	1	20
F(X)	0	0	0	0	0	3	14	0	9	1640

Solução ótima encontra produzir X1=40 e X2=32 e X3=20, gerando um lucro máximo de R$ 1.640,00.

Método Dual SIMPLEX



Todo problema de P.L. pode ser substituído por um modelo equivalente denominado "Dual". O modelo original é chamado "Primal".

Problema Primal

Max $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Sujeito a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = \{1,2,\dots,m\}$

e $x_j \geq 0 \quad j = \{1,2,\dots,n\}$

Notação Matricial

Max $Z = cx$

Sujeito a $Ax \leq b$

e $x \geq 0$

Problema Dual

Min $W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

Sujeito a $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = \{1,2,\dots,n\}$

e $y_i \geq 0 \quad i = \{1,2,\dots,m\}$

Notação Matricial

Min $W = yb$

Sujeito a $yA \geq c$

e $y \geq 0$

Modelo primal

Função Objetivo MAX L = 20x1+15x2+18x3

O 3° Passo a modelagem das restrições técnicas

5x1+3x2+5x3<=400 (Horas disponíveis no torno)

8x1+4x2<=500 (Horas Disponíveis na Fresa)

2x1+5x2+3x3<=300(Horas disponíveis na Furadeira)

X1<=40 (Demanda Máxima semanal de P1)

X2<=50 (Demanda Máxima Semanal de P2)

X3<=20 (Demanda Máxima Semanal de P3)

Variáveis de não negatividade X1, X2 e x3 ≥ 0 (Condição que deve ser produzir)

O método dual consiste em avaliar o incremento na produção de uma unidade a mais de um dos produtos, ou seja, quais serão os impactos no lucro se eu resolver produzir uma unidade a mais dos produtos.

Modelo DUAL

Função objetivo= Min Z= 400y1+500y2+300y3+40y4+50y5+20y6

Sujeito a:

5y1+8y2+2y3+y4>=20

3y1+4y2+5y3+y5>=15

5y1+0y2+3y3+y6>=18

variáveis de não negatividade [y1+y2+y3+y4+y5+y6>=0]

Tabela1= DUAL

SB	y1	y2	y3	y4	y5	y6	F1	F2	F3	VSM
	-5	-8	-2	-1	0	0	1	0	0	-20
	-3	-4	-5	0	-1	0	0	1	0	-15
	-5	0	-3	0	0	-1	0	0	1	-18
F(Z)	-400	-500	-300	-40	-15	-20	0	0	0	0

Para iniciar o cálculo do método dual através do simplex, deve-se tirar uma variável da base e colocar uma variável na base.

- A variável que sai: é a variável básica com o valor mais negativo. Se todas as variáveis básicas tiverem valores positivos a solução é ótima. Nesta caso as variáveis básicas Y3= -10 e Y4= -6, são negativas, portanto a solução inicial e inviável.

- a Variável que entra: é escolhida entre as variáveis fora da base, da seguinte maneira:

1. Dividir os coeficientes do lado esquerdo da equação Z transformada pelos correspondentes coeficientes negativos da equação da variável que sai da base.
2. a variável que entra é a que tem o menor valor entre os quocientes encontrados (problemas de minimização) ou o menor valor absoluto (problemas de maximização).

Quando em ambos os casos, não houver coeficiente negativos na linha da variável que sai da base, o problema não tem solução viável.

Para começarmos o cálculo vamos escolher uma variável para sair da base, sai da base F1 e entra na base y4.

Tabela2: DUAL

SB	y1	y2	y3	y4	y5	y6	F1	F2	F3	VSM
	5	8	2	1	0	0	-1	0	0	20
	-3	-4	-5	0	-1	0	0	1	0	-15
	-5	0	-3	0	0	-1	0	0	1	-18
F(Z)	-200	-180	-220	0	-50	-20	-40	0	0	800

Esta não é a melhor solução, pois ainda há valores negativos na coluna VSM. Sai da base F3 e entra base Y6

Tabela3: DUAL

SB	y1	y2	y3	y4	y5	y6	F1	F2	F3	VSM
	5	8	2	1	0	0	-1	0	0	20
	-3	-4	-5	0	-1	0	0	1	0	-15
	5	0	3	0	0	1	0	0	-1	18
F(Z)	-100	-180	-160	0	-50	0	-40	0	-20	1160

Esta ainda não é a melhor solução, pois ainda há coeficientes negativos na coluna VSM.

Próxima solução sai da base F2 e entra na base Y3

Tabela4:DUAL

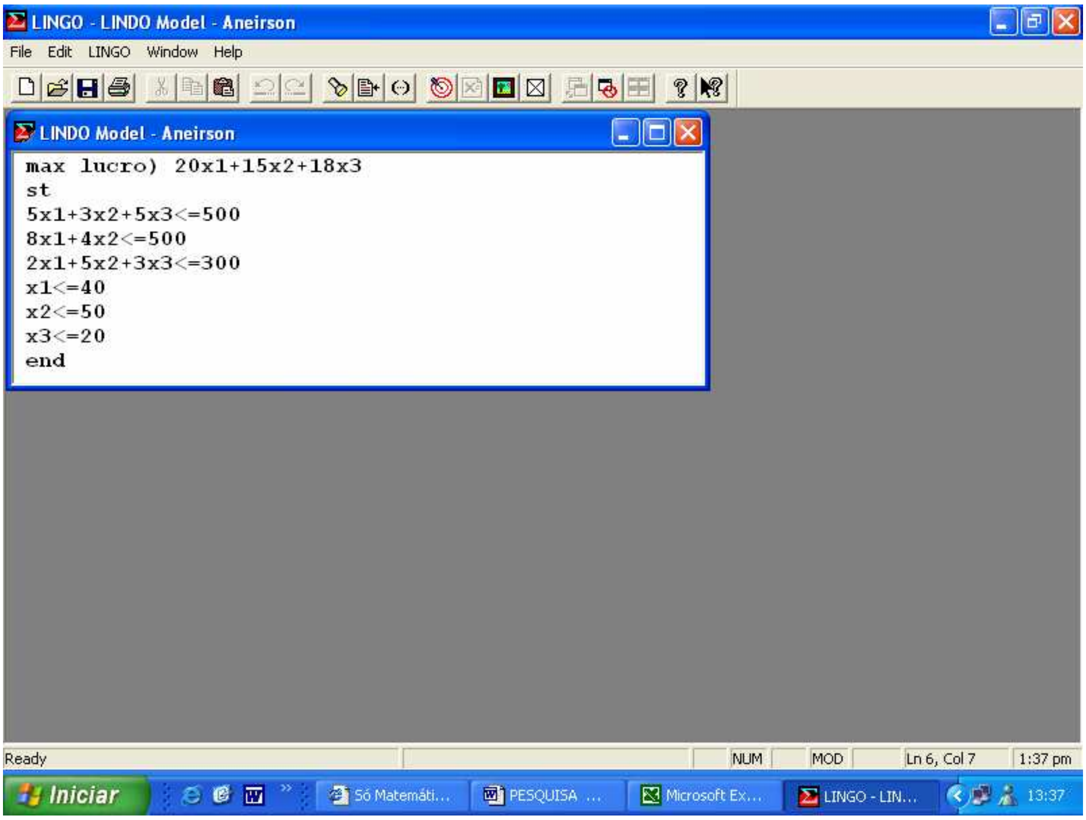
SB	y1	y2	y3	y4	y5	y6	F1	F2	F3	VSM
	3,8	6,4	0	1	-0,4	0	-1	0,4	0	14
	0,6	0,8	1	0	0,2	0	0	-0,2	0	3
	3,2	-2,4	0	0	-0,6	1	0	0,6	-1	9
F(Z)	-4	-52	0	0	-18	0	-40	-32	-20	1.640

Esta é melhor solução, pois a solução ótima DUAL é igual a uma solução ótima Primal.

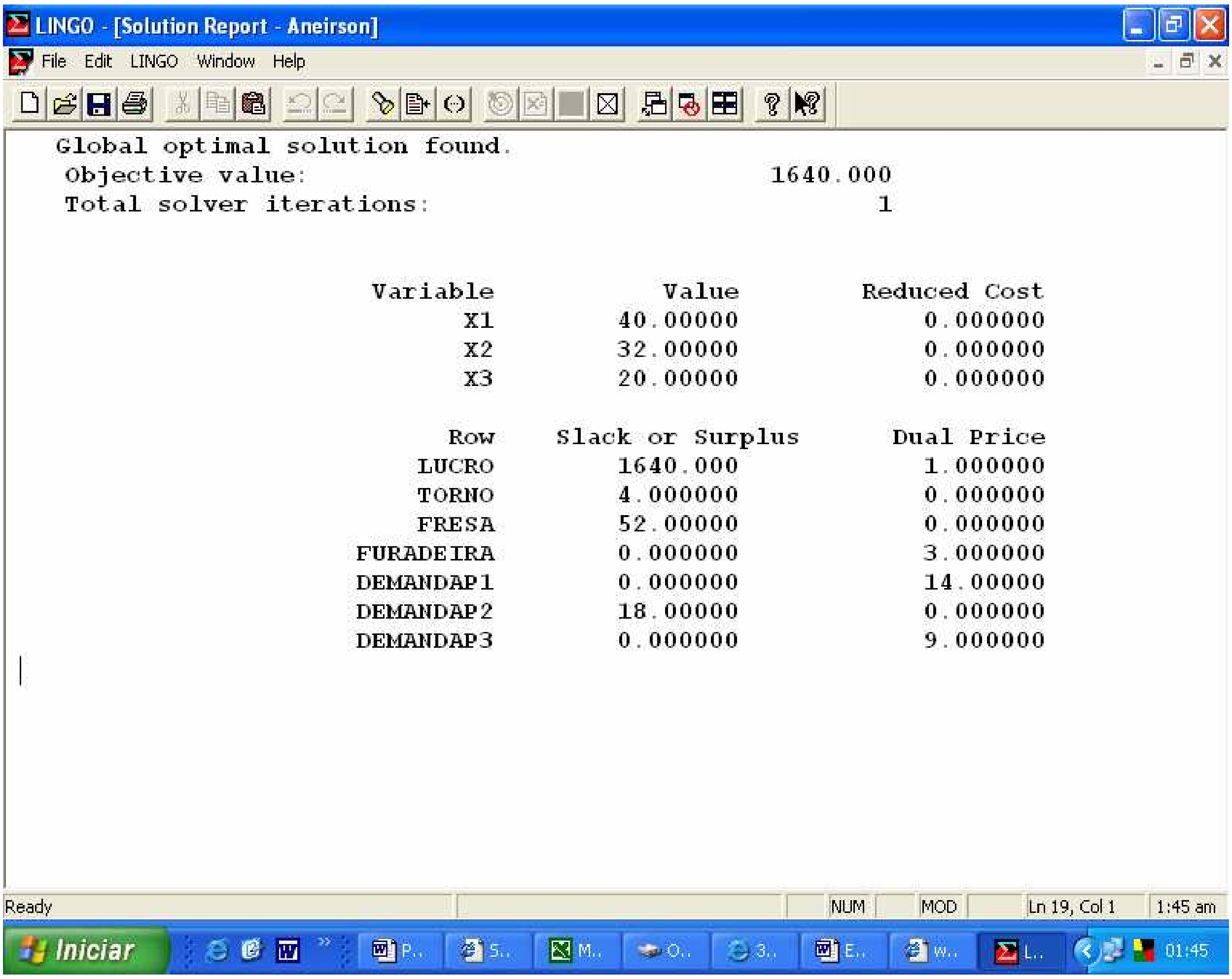
Interpretação econômica do dual.

Se a empresa conseguir vender o produto x3 e uma unidade a mais, seu lucro aumentaria em R$9,00. Se a empresa conseguir aumentar em 1 hora a disponibilidade da furadeira, para produção seu lucro aumentaria em R$3,00 reais e finalmente se empresa conseguir vender o produto x1 em uma unidade a mais o lucro aumentaria em R$ 14,00 reais.

Resolução através do software lingo



modelagem matemática dos dados.

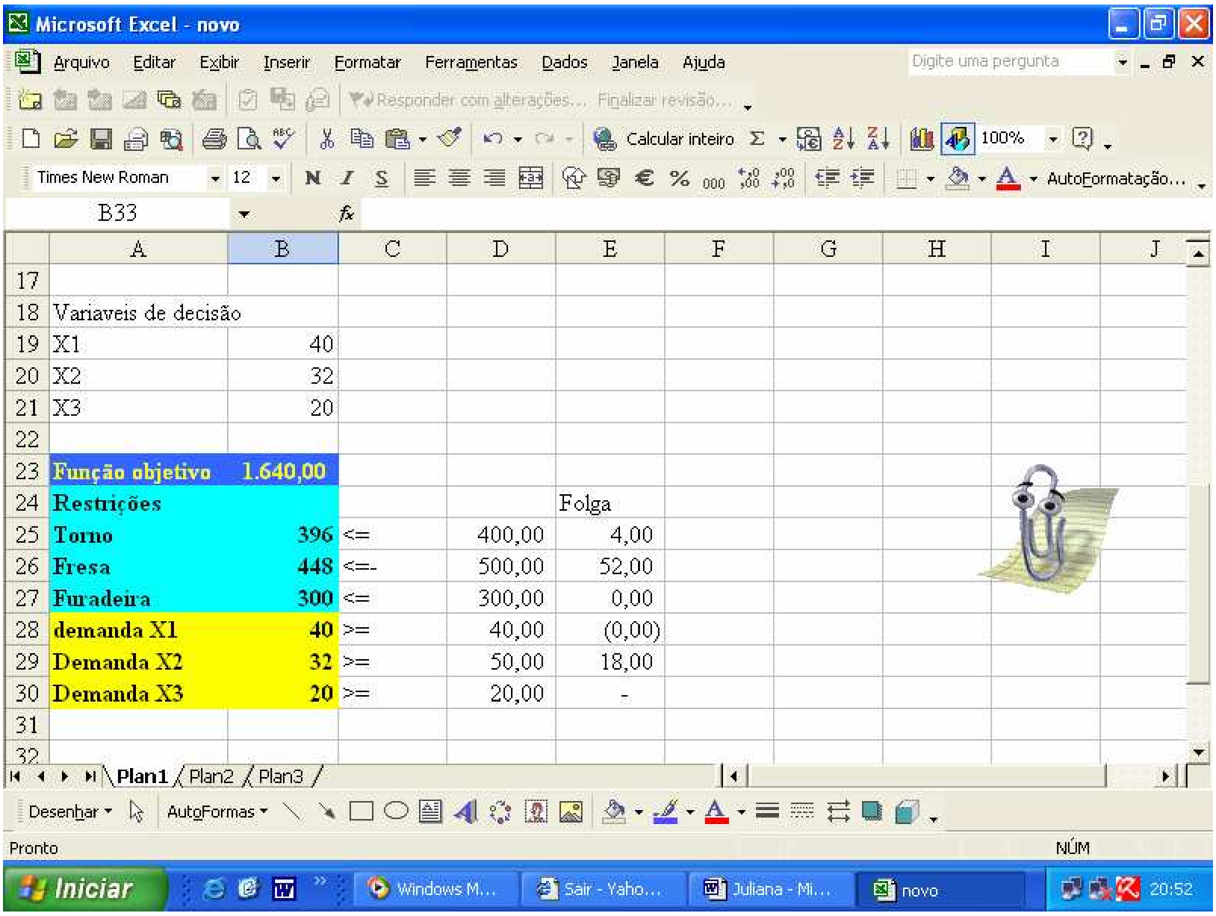


Variable	Value	Reduced Cost
X1	40.00000	0.000000
X2	32.00000	0.000000
X3	20.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LUCRO	1640.000	1.000000
TORNO	4.000000	0.000000
FRESA	52.00000	0.000000
FURADEIRA	0.000000	3.000000
DEMANDAP1	0.000000	14.00000
DEMANDAP2	18.00000	0.000000
DEMANDAP3	0.000000	9.000000

resultado das modelagens:

Solução ótima produzir X1=40, X2=32 e X3=20, gerando um lucro máximo de R$ 1.640,00. Se a empresa conseguir aumentar a demanda do Produto P3 em uma unidade o lucro aumentaria em R$ 9,00 e se a demanda do produto P1 aumentar em uma unidade o lucro aumentaria para R$ 14,00.



	A	B	C	D	E
17					
18	Variaveis de decisão				
19	X1	40			
20	X2	32			
21	X3	20			
22					
23	**Função objetivo**	**1.640,00**			
24	**Restrições**				Folga
25	**Torno**	**396**	<=	400,00	4,00
26	**Fresa**	**448**	<=-	500,00	52,00
27	**Furadeira**	**300**	<=	300,00	0,00
28	**demanda X1**	**40**	>=	40,00	(0,00)
29	**Demanda X2**	**32**	>=	50,00	18,00
30	**Demanda X3**	**20**	>=	20,00	-
31					

Solução ótima: produzir X1= 40, X2=32 e X3= 20, gerando uma receita máxima de R$ 1.640