Menorização: Um Pequeno Adendo à Teoria de Matrizes e Determinantes

R. M. Nascimento

***Resumo*— Este artigo tem por objetivo apresentar e, quem sabe, popularizar uma metodologia ainda pouco explorada na teoria aplicada aos determinantes. Traz, ainda, uma abordagem diferenciada para a decomposição LU. Conhecimento prévio necessário: determinantes 2x2. Essa técnica, em virtude de sua simplicidade, merece ser mais bem conhecida.**

***Palavras-chave*— Matrizes, Determinantes, Decomposição LU.**

I. MENORIZAÇÃO

O PROCESSO de menorizaçao consiste em transformar uma matriz quadrada de ordem *n* em outra de ordem *n*-1, sucessivamente, até a matriz 1x1. Os componentes de cada matriz subsequente são determinantes 2x2 obtidos, na matriz imediatamente anterior, entre a fila (linha e coluna) de um Pivô (elemento diferente de zero e escolhido de modo aleatório) e os integrantes de seu menor complementar. Proposição: concluída a menorização o determinante é calculado conforme (1.1).

$$Det(A)_{nxn} = \prod_{k=1}^{n} P_k^{2-k}, P_k \neq 0 \,\forall k \neq 1 \qquad (1.1)$$

Em que P_k representa o Pivô da matriz de ordem "*k*".

Seja (1.2)~(1.5) a menorização de uma matriz A_{4x4}:

$$A_{4x4} = \begin{pmatrix} P_4 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

$$B_{3x3} = \begin{pmatrix} P_3 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

$$C_{2x2} = \begin{pmatrix} P_2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

$$D_{1x1} = \left(P_1\right) \qquad (1.5)$$

Em que:

$$\boldsymbol{A}\Rightarrow \left\{ P_4 = a_{11} \right.$$

Se δ_{ij} é um elemento qualquer de B_{3x3}, C_{2x2} ou D_{1x1}, então:

$$\delta_{ij} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad (1.6)$$

$$\boldsymbol{B}\Rightarrow \begin{cases} \overbrace{P_3}^{b_{11}} = \begin{vmatrix} P_4 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} b_{12} = \begin{vmatrix} P_4 & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} b_{13} = \begin{vmatrix} P_4 & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \\ b_{21} = \begin{vmatrix} P_4 & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} b_{22} = \begin{vmatrix} P_4 & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} b_{23} = \begin{vmatrix} P_4 & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} \\ b_{31} = \begin{vmatrix} P_4 & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} b_{32} = \begin{vmatrix} P_4 & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} b_{33} = \begin{vmatrix} P_4 & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{C}\Rightarrow \begin{cases} \overbrace{P_2}^{c_{11}} = \begin{vmatrix} P_3 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} c_{12} = \begin{vmatrix} P_3 & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \\ c_{21} = \begin{vmatrix} P_3 & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} c_{22} = \begin{vmatrix} P_3 & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{D}\Rightarrow \begin{cases} \overbrace{P_1}^{d_{11}} = \begin{vmatrix} P_2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \end{cases}$$

Para a matriz (1.2) o determinante é:

$$Det(A) = \prod_{k=1}^{4} P_k^{2-k} = P_1^{(2-1)} P_2^{(2-2)} P_3^{(2-3)} P_4^{(2-4)} \qquad (1.7)$$

O modo adotado em (1.2)~(1.5) é o único discutido neste texto: propõe como Pivô o primeiro elemento da diagonal principal de cada matriz, particularidade que o credencia como um procedimento alternativo na resolução de sistemas lineares [1][2][3]. Contudo, difererentes estratégias podem ser adotadas. Em [5], p. ex., o último elemento da diagonal principal é preposto como Pivô. Exemplos numéricos para (1.1) podem ser verificados em [4].

Segue a comprovação do resultado indicado em (1.7).

II. VALIDAÇÃO

A proposição (1.1) pode ser reescrita na forma (2.1):

$$Det(A)_{nxn} = \prod_{k=1}^{n} P_k^{1-(k-1)} = \boxed{P_1 \prod_{k=2}^{n} \frac{P_k}{P_k^{k-1}}, P_k \neq 0} \qquad (2.1)$$

Dessa forma o determinante da matriz (1.2), calculado em (1.7), assume a forma (2.2):

tth.complexpower@gmail.com

$$Det(A) = P_1 \prod_{k=2}^{4} \frac{P_k}{P_k^{k-1}} = \frac{P_1}{1}\frac{P_2}{P_2}\frac{P_3}{P_3^2}\frac{P_4}{P_4^3} \quad (2.2)$$

Para uma melhor compreensão do algoritmo de comprovação, bem como evitar as fórmulas, é útil reorganizar as frações:

$$Det(A) = 1\frac{P_4}{1}\frac{P_3}{P_4}\frac{P_2}{P_4P_3}\frac{P_1}{P_4P_3P_2} \quad (2.3)$$

Ou seja, na menorização $n \rightarrow 1$ são utilizados n Pivôs. O ordenamento proposto em (2.3) sugere uma regra para organizá-los, de forma que:

- **Os numeradores são dispostos de modo decrescente, obedecendo à sequência de menorização, enquanto aos denominadores atribui-se o produto dos numeradores das frações precedentes.**

Segue a demonstração de (1.1) por decomposição LU (2.14) e do Teorema de Binet (2.12).

A. DECOMPOSIÇÃO LU

1. **N**ormatizar a menorização (1.2)~(1.5):

$$A_{4x4} = \begin{pmatrix} P_4 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$B_{3x3} = \frac{1}{P_4}\begin{pmatrix} P_3 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$C_{2x2} = \frac{1}{P_4P_3}\begin{pmatrix} P_2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$D_{1x1} = \frac{1}{P_4P_3P_2}(P_1) \quad (2.7)$$

2. De (2.4)~(2.7) montar a matriz $A_{P\,(4x4)}$ com as filas de Pivôs (2.8):

$$A_P = \begin{pmatrix} P_4 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \frac{P_3}{P_4} & \frac{b_{12}}{P_4} & \frac{b_{13}}{P_4} \\ a_{31} & \frac{b_{21}}{P_4} & \frac{P_2}{P_4P_3} & \frac{c_{12}}{P_4P_3} \\ a_{41} & \frac{b_{31}}{P_4} & \frac{c_{21}}{P_4P_3} & \frac{P_1}{P_4P_3P_2} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

3. Extrair de A_P a matriz triangular superior A_{Ts} (2.9):

$$A_{Ts} = \begin{pmatrix} P_4 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \frac{P_3}{P_4} & \frac{b_{12}}{P_4} & \frac{b_{13}}{P_4} \\ 0 & 0 & \frac{P_2}{P_4P_3} & \frac{c_{12}}{P_4P_3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{P_1}{P_4P_3P_2} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

4. Extrair de A_P a matriz triangular inferior A_{pi} (2.10) e ajustar suas colunas tendo em vista a diagonal principal unitária A_{Ti} (2.11):

$$A_{Pi} = \begin{pmatrix} P_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & \frac{P_3}{P_4} & 0 & 0 \\ a_{31} & \frac{b_{21}}{P_4} & \frac{P_2}{P_4P_3} & 0 \\ a_{41} & \frac{b_{31}}{P_4} & \frac{c_{21}}{P_4P_3} & \frac{P_1}{P_4P_3P_2} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$\Downarrow$$

$$A_{Ti(i,j)} = \frac{A_{Pi(i,j)}}{A_{Pi(j,j)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{P_4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{P_4} & \frac{b_{21}}{P_3} & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}}{P_4} & \frac{b_{31}}{P_3} & \frac{c_{21}}{P_2} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

- O leitor pode constatar o mesmo resultado se, de modo similar, a diagonal principal unitária for ajustada nas linhas de (2.9) enquanto (2.10) permanece inalterada.

5. Aplicar o Teorema de Binet:

$$Det(A_{Ti}.A_{Ts}) = Det(A_{Ti}).Det(A_{Ts}) \quad (2.12)$$

$$Det(A_{Ti}.A_{Ts}) = (1)\overbrace{\left(\frac{P_4}{1}\frac{P_3}{P_4}\frac{P_2}{P_4P_3}\frac{P_1}{P_4P_3P_2}\right)}^{Det(A)} \quad (2.13)$$

6. Completar a prova com a verificação da igualdade $A = \underbrace{A_{Ti}}_{L}.\underbrace{A_{Ts}}_{U}$ (2.14):

$$
A=\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{P_4} & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{31}}{P_4} & \dfrac{b_{21}}{P_3} & 1 & 0 \\ \dfrac{a_{41}}{P_4} & \dfrac{b_{31}}{P_3} & \dfrac{c_{21}}{P_2} & 1 \end{pmatrix}}^{L}\overbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{P_4}^{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \dfrac{P_3}{P_4} & \dfrac{b_{12}}{P_4} & \dfrac{b_{13}}{P_4} \\ 0 & 0 & \dfrac{P_2}{P_4P_3} & \dfrac{c_{12}}{P_4P_3} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{P_1}{P_4P_3P_2} \end{pmatrix}}^{U} \tag{2.14}
$$

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
\left(\dfrac{a_{21}}{\cancel{P_4}}\cancel{P_4}\right) & \left(\dfrac{a_{21}}{P_4}a_{12}+\dfrac{P_3}{P_4}\right) & \left(\dfrac{a_{21}}{P_4}a_{13}+\dfrac{b_{12}}{P_4}\right) & \left(\dfrac{a_{21}}{P_4}a_{14}+\dfrac{b_{13}}{P_4}\right) \\
\left(\dfrac{a_{31}}{\cancel{P_4}}\cancel{P_4}\right) & \left(\dfrac{a_{31}}{P_4}a_{12}+\dfrac{b_{21}}{\cancel{P_3}}\dfrac{\cancel{P_3}}{P_4}\right) & \left(\dfrac{a_{31}}{P_4}a_{13}+\dfrac{b_{21}}{P_3}\dfrac{b_{12}}{P_4}+\dfrac{P_2}{P_4P_3}\right) & \left(\dfrac{a_{31}}{P_4}a_{14}+\dfrac{b_{21}}{P_3}\dfrac{b_{13}}{P_4}+\dfrac{c_{12}}{P_4P_3}\right) \\
\left(\dfrac{a_{41}}{\cancel{P_4}}\cancel{P_4}\right) & \left(\dfrac{a_{41}}{P_4}a_{12}+\dfrac{b_{31}}{\cancel{P_3}}\dfrac{\cancel{P_3}}{P_4}\right) & \left(\dfrac{a_{41}}{P_4}a_{13}+\dfrac{b_{31}}{P_3}\dfrac{b_{12}}{P_4}+\dfrac{c_{21}}{\cancel{P_2}}\dfrac{\cancel{P_2}}{P_4P_3}\right) & \left(\dfrac{a_{41}}{P_4}a_{14}+\dfrac{b_{31}}{P_3}\dfrac{b_{13}}{P_4}+\dfrac{c_{21}}{P_2}\dfrac{c_{12}}{P_4P_3}+\dfrac{P_1}{P_4P_3P_2}\right)
\end{pmatrix}
$$

$$
A_{(i,j)}\Rightarrow\begin{cases}
\{A_{(1,1)}=a_{11}\}\{A_{(1,2)}=a_{12}\}\{A_{(1,3)}=a_{13}\}\{A_{(1,4)}=a_{14}\}\{A_{(2,1)}=a_{21}\} \\
\left\{A_{(2,2)}=\dfrac{\cancel{a_{21}a_{12}}+\cancel{P_4}a_{22}-\cancel{a_{21}a_{12}}}{\cancel{P_4}}=a_{22}\right\}\left\{A_{(2,3)}=\dfrac{\cancel{a_{21}a_{13}}+\cancel{P_4}a_{23}-\cancel{a_{21}a_{13}}}{\cancel{P_4}}=a_{23}\right\} \\
\left\{A_{(2,4)}=\dfrac{\cancel{a_{21}a_{14}}+\cancel{P_4}a_{24}-\cancel{a_{21}a_{14}}}{\cancel{P_4}}=a_{24}\right\}\{A_{(3,1)}=a_{31}\}\left\{A_{(3,2)}=\dfrac{\cancel{a_{31}a_{12}}+\cancel{P_4}a_{32}-\cancel{a_{31}a_{12}}}{\cancel{P_4}}=a_{32}\right\} \\
\left\{A_{(3,3)}=\dfrac{a_{31}a_{13}}{P_4}+\dfrac{\cancel{b_{21}b_{12}}+\cancel{P_3}b_{22}-\cancel{b_{21}b_{12}}}{P_4\cancel{P_3}}=\dfrac{\cancel{a_{31}a_{13}}+\cancel{P_4}a_{33}-\cancel{a_{31}a_{13}}}{\cancel{P_4}}=a_{33}\right\} \\
\left\{A_{(3,4)}=\dfrac{a_{31}a_{14}}{P_4}+\dfrac{\cancel{b_{21}b_{13}}+\cancel{P_3}b_{23}-\cancel{b_{21}b_{13}}}{P_4\cancel{P_3}}=\dfrac{\cancel{a_{31}a_{14}}+\cancel{P_4}a_{34}-\cancel{a_{31}a_{14}}}{\cancel{P_4}}=a_{34}\right\} \\
\{A_{(4,1)}=a_{41}\}\left\{A_{(4,2)}=\dfrac{\cancel{a_{41}a_{12}}+\cancel{P_4}a_{42}-\cancel{a_{41}a_{12}}}{\cancel{P_4}}=a_{42}\right\} \\
\left\{A_{(4,3)}=\dfrac{a_{41}a_{13}}{P_4}+\dfrac{\cancel{b_{31}b_{12}}+\cancel{P_3}b_{32}-\cancel{b_{31}b_{12}}}{P_4\cancel{P_3}}=\dfrac{\cancel{a_{41}a_{13}}+\cancel{P_4}a_{43}-\cancel{a_{41}a_{13}}}{\cancel{P_4}}=a_{43}\right\} \\
\left\{\begin{aligned} &A_{(4,4)}=\dfrac{a_{41}a_{14}}{P_4}+\dfrac{b_{31}b_{13}}{P_4P_3}+\dfrac{\cancel{c_{21}c_{12}}+\cancel{P_2}c_{22}-\cancel{c_{21}c_{12}}}{P_4P_3\cancel{P_2}}=\dfrac{a_{41}a_{14}}{P_4}+\dfrac{\cancel{b_{31}b_{13}}+\cancel{P_3}b_{33}-\cancel{b_{31}b_{13}}}{P_4\cancel{P_3}}= \\ &\dfrac{\cancel{a_{41}a_{14}}+\cancel{P_4}a_{44}-\cancel{a_{41}a_{14}}}{\cancel{P_4}}=a_{44}\end{aligned}\right\}
\end{cases}
$$

III. CONSIDERAÇÃO FINAL

É compreensível a inexistência de menções, na teoria vigente, sobre a metodologia aqui discutida. Afinal, sua aplicação depende de uma notória restrição: $P_k \neq 0$. Há séculos procedimentos têm sido utilizados de modo antagônico, com inegável êxito. A menorização oferece, no entanto, além da praticidade, mais uma singular relação entre os números, o que torna a matemática ainda mais bela e divertida!

AGRADECIMENTOS

"Àquele que pode, por sua força que opera em nós, realizar infinitamente mais do que tudo o que pedimos e imaginamos; a Ele seja dada a glória na Igreja e em Cristo Jesus, por todas as gerações, através de todos os séculos. Assim seja!" (Ef 3,20-21)

REFERÊNCIAS

[1] M. Sadosky, *Cálculo Numérico e Gráfico*. Interciência, Rio de Janeiro, pp. 87-90, 1980.

[2] C. Soares. (2019, Dezembro). *Solução de Sistemas de Equações Lineares- Método de Castilho* [*Online*]. Disponível em: https://camilasoares.wordpress.com/2009/03/02/solucao-de-sistemas-de-equacoes-lineares-%E2%80%93-metodo-de-castilho/

[3] K. Kilhian. (2020, Janeiro). *Método de Castilho* [*Online*]. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2008/11/mtodo-de-castilho.html

[4] R. M. Nascimento. (2020, Janeiro). *Cálculo do determinante de uma matriz genérica nxn* [*Online*], Disponível em: http://www.somatematica.com.br/trabalhos/calc_det.zip

[5] R. M. Nascimento. (2020, Janeiro). *Linear algebra with pivoting* [*Online*], Disponível em: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7987-detp

Reinaldo Mauricio do Nascimento é Técnico em Eletrotécnica (CEFET-MG-1978), Técnico em Eletrônica (COTEMIG-MG-1989) e graduado em Engenharia de Controle e Automação pela Faculdade Pitágoras de Belo Horizonte – MG – 2013.