Cálculo das Órbitas Planetárias

por Eng. Andrés Esteban de la Plaza

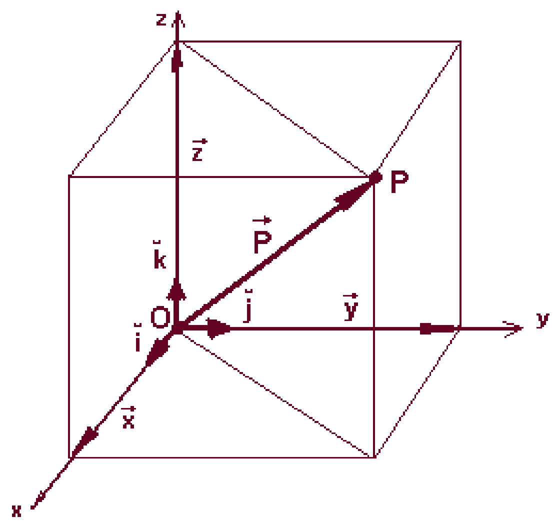
http://www.geocities.com/lemagicien_2000/

ÍNDICE:

1. REPRESENTAÇÃO DE VETORES

A posição de um ponto **P** no espaço pode ser definida por um vetor posição $\vec{P}$ com origem num centro **O** de coordenadas ortogonais retangulares. Definindo nesta terna **xyz**, os ***versores*** (vetores unitários) dos eixos, obtemos respectivamente : o versor $\breve{i}$ como versor da direção **x**, o versor $\breve{j}$ como o versor da direção **y**, e o versor $\breve{k}$ como o versor da direção **z**. Assim, qualquer vetor definido num destes eixos estará representado pelo produto de um escalar igual ao módulo e do versor da direção

$$\Rightarrow \vec{X} = |\vec{X}| \cdot \breve{i} = x \cdot \breve{i} .$$



Portanto, podemos decompor o vetor $\vec{P}$ em seus componentes ortogonais $\vec{x}_P$, $\vec{y}_P$ e $\vec{z}_P$ no sistema de centro **O**:

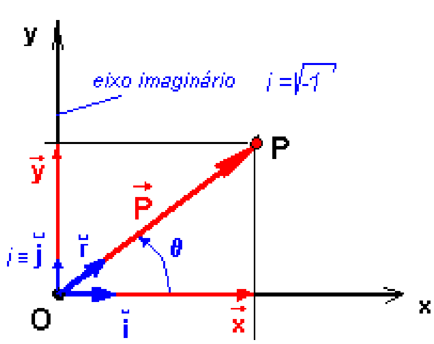
(projeções de $\vec{P}$ nos eixos **x**, **y**, e **z**) de forma que

$$\vec{P} = \vec{x}_P + \vec{y}_P + \vec{z}_P = x_P\breve{i} + y_P\breve{j} + z_P\breve{k} .$$

Também podemos representar este vetor de forma matricial:

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \qquad r = |\vec{P}| = \sqrt{(\vec{x}_P)^2 + (\vec{y}_P)^2 + (\vec{z}_P)^2}$$

Porém esta não é única representação possível para o ponto **P**. Podemos imaginar um plano que contém o vetor $\vec{P}$ e o centro **O**, de maneira que, embora ainda continuemos no espaço tridimensional, a representação de $\vec{P}$ é feita num plano, entretanto, este plano será um ***plano complexo*** ou seja, o eixo **x** será real, e o eixo **y** será imaginário, ou seja:



A vantagem de procedermos assim está dada pela possibilidade de representarmos um número complexo na sua forma exponencial, como um vetor. Ë fácil observar que se definimos o versor $\breve{i}$ para a direção **x**, então a direção de **r** estará definida por um versor $\breve{r}$ tal que $\breve{r} = e^{\theta i} \cdot \breve{i}$ onde $i = \sqrt{-1}$, logo:

$$\breve{r} = e^{\theta i}\breve{i} = (cos\,\theta + i\ sen\,\theta) \cdot \breve{i} = \breve{i} \cdot cos\,\theta + i\breve{i}\ sen\,\theta$$

e como $i\breve{i} = \breve{j}$ pois multiplicar por i equivale a girar $\breve{i}$ 90°:

$$\breve{r} = \breve{i} \cdot cos\,\theta + \breve{j} \cdot sen\,\theta$$

de forma que: $\vec{P} = \vec{r} = r \cdot \breve{r} = r \cdot e^{\theta i} \cdot \breve{i}$

que é a expressão do raio vetor em coordenadas polares.

2. ACELERAÇÃO EM COORDENADAS POLARES

Podemos agora proceder a derivar $\vec{P} = \vec{r} = \mathbf{r} \cdot \breve{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^{\theta i} \cdot \breve{\mathbf{i}}$ respeito de tempo para encontrar a aceleração. Porém antes vamos calcular a derivada respeito do tempo de $\breve{\mathbf{r}}$, pois é uma função de θ, ou seja que $\breve{\mathbf{r}} = \breve{\mathbf{r}}\,(\theta)$:

$$\dot{\breve{\mathbf{r}}} = \frac{d\breve{\mathbf{r}}}{d\mathbf{t}} = \frac{d\left(\mathbf{e}^{\theta i}\breve{\mathbf{i}}\right)}{d\mathbf{t}} = \frac{d\left(\mathbf{e}^{\theta i} \cdot \breve{\mathbf{i}}\right)}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\mathbf{t}} = i\mathbf{e}^{\theta i}\breve{\mathbf{i}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \breve{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \breve{\mathbf{n}} \quad \text{onde } \breve{\mathbf{n}} = \text{versor normal a } \breve{\mathbf{r}}$$

logo: $\dot{\breve{\mathbf{r}}} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \breve{\mathbf{n}}$

$$\dot{\breve{\mathbf{n}}} = \frac{d\breve{\mathbf{n}}}{d\mathbf{t}} = \frac{d(\breve{\mathbf{n}})}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\mathbf{t}} = \frac{d\left(i\mathbf{e}^{\theta i}\breve{\mathbf{i}}\right)}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\mathbf{t}} = i^2\mathbf{e}^{\theta i}\breve{\mathbf{i}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{e}^{\theta i}\breve{\mathbf{i}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = -\breve{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

logo: $\dot{\breve{\mathbf{n}}} = -\breve{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$

vamos calcular então a primeira derivada de $\vec{\mathbf{r}}$, ou seja $\dot{\vec{\mathbf{r}}}$:

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\mathbf{t}} = \frac{d(\mathbf{r}\breve{\mathbf{r}})}{d\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{t}} \cdot \breve{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \cdot \frac{d\breve{\mathbf{r}}}{d\mathbf{t}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \breve{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}\breve{\mathbf{n}}$$

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \breve{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}\breve{\mathbf{n}}$$

vamos calcular agora a segunda derivada de $\vec{\mathbf{r}}$, ou seja $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}$:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{d\mathbf{t}^2} = \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{d\mathbf{t}} = \frac{d\left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \breve{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \breve{\mathbf{n}}\right)}{d\mathbf{t}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{d\mathbf{t}} \cdot \breve{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\breve{\mathbf{r}}}{d\mathbf{t}} + \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{t}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}\breve{\mathbf{n}} + \mathbf{r} \cdot \frac{d\dot{\boldsymbol{\theta}}}{d\mathbf{t}} \cdot \breve{\mathbf{n}} + \mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{d\breve{\mathbf{n}}}{d\mathbf{t}} =$$

$$= \ddot{\mathbf{r}} \cdot \breve{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}\breve{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}\breve{\mathbf{n}} + \mathbf{r} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \breve{\mathbf{n}} + \mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left(-\breve{\mathbf{r}}\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) =$$

$$= \ddot{\mathbf{r}}\breve{\mathbf{r}} + 2\dot{\mathbf{r}}\dot{\boldsymbol{\theta}}\breve{\mathbf{n}} + \mathbf{r}\ddot{\boldsymbol{\theta}}\breve{\mathbf{n}} - \mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2\breve{\mathbf{r}} =$$

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \left(\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2\right)\breve{\mathbf{r}} + \left(2\dot{\mathbf{r}}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{r}\ddot{\boldsymbol{\theta}}\right)\breve{\mathbf{n}}$$

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \left(\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2\right)\breve{\mathbf{r}} + \left(2\dot{\mathbf{r}}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{r}\ddot{\boldsymbol{\theta}}\right)\breve{\mathbf{n}}$$

onde:

aceler. radial :	$\mathbf{a_r} = \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2$
aceler. normal:	$\mathbf{a_n} = 2\dot{\mathbf{r}}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{r}\ddot{\boldsymbol{\theta}}$
aceler. total en coordenadas polares:	$\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{a_r}\breve{\mathbf{r}} + \mathbf{a_n}\breve{\mathbf{n}}$

3. FORÇAS CENTRAIS E GRAVITAÇÃO

Inicialmente vamos deduzir as fórmulas que determinam as trajetórias dos corpos que se encontram sujeitos à atração de forças centrais, no caso particular da a lei da gravitação universal, ou seja

$$\vec{F} = -G\frac{M_S m}{r^2}\breve{r}$$

De acordo com a figura 1 temos:

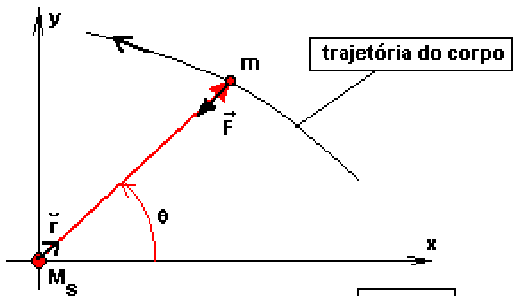


Figura 1

Onde o ponto **m** está submetido à força :

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\breve{r}$$

$\breve{r}$ é o versor (vetor unitário) da direção de $\vec{F}$ e:

$$\breve{r} = \breve{r}(t)$$
$$\theta = \theta(t)$$

e t = tempo ; $\mathbf{M_S}$ = massa corpo central ; **m** = massa objeto

A resolução deste problema deve proporcionar as seguintes funções:

$$r = r(\theta)$$
$$\theta = \theta(t)$$

As expressões para a aceleração em função das componentes normal e radial da aceleração são:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_r\breve{r} + a_n\breve{n} \quad \text{onde} \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{d^2 r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2$$
$$a_n = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Mas nos sistemas de forças centrais sabemos que a aceleração normal é nula $\Rightarrow$ $\mathbf{a_n}$=0, portanto a aceleração será:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_r\breve{r}$$
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{d^2 r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2$$

e lembrando que a equação diferencial geral do movimento central neste caso é:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{M_S m}{r^2}\breve{r}$$

4. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO PROBLEMA

A equação diferencial geral do problema pode ser decomposta em duas particulares:

$$m\left(a_r\breve{r} + a_n\breve{n}\right) = -G\frac{M_s m}{r^2}\breve{r} \qquad e \qquad a_n = 0$$

temos então:

$$ma_r = -G\frac{M_s m}{r^2} \Rightarrow a_r = -G\frac{M_s}{r^2}$$

$$ma_n = 0 \Rightarrow a_n = 0 \quad (\text{pois } m \neq 0) \qquad [2]$$

então a equação diferencial que temos que resolver será:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

[1]

porém não conhecemos as relações $r = r(t),\ \theta = \theta(t)$, mas lembrando da equaçã o [2] obtemos que:

$$a_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

ou seja : $2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ entretanto $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dot{r} = r'\dot{\theta}$

De $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$ podemos obter $\ddot{\theta}$, ou seja:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \qquad \text{e como} \qquad \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \qquad \text{mas} \quad \dot{r} = r'\cdot\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{2r'\dot{\theta}\dot{\theta}}{r} = -\frac{2r'\dot{\theta}^2}{r} \qquad \text{e como } r' = \frac{dr}{d\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -2\cdot\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{1}{r}\cdot\dot{\theta} \qquad [2a]$$

fazendo passagem de términos na [2 a] obtemos:

$$\frac{d\,\boldsymbol{\theta}}{d\,\mathbf{t}}\cdot d\,\dot{\boldsymbol{\theta}} = -2\cdot\frac{d\,\mathbf{r}}{\mathbf{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}^2$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}\cdot d\,\dot{\boldsymbol{\theta}} = -2\cdot\frac{d\,\mathbf{r}}{\mathbf{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}^2$$

$$\Rightarrow \quad d\,\dot{\boldsymbol{\theta}} = -2\cdot\frac{d\,\mathbf{r}}{\mathbf{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\,\dot{\boldsymbol{\theta}}}{\dot{\boldsymbol{\theta}}} = -2\frac{d\,\mathbf{r}}{\mathbf{r}} \qquad [3]$$

integrando agora a [3]: $$\int\frac{d\,\dot{\boldsymbol{\theta}}}{\dot{\boldsymbol{\theta}}} = -2\int\frac{d\,\mathbf{r}}{\mathbf{r}}$$

$$ln\,\dot{\boldsymbol{\theta}} = -2\,ln\,\mathbf{r} + \text{constante}$$

$$\Rightarrow \quad ln\,\dot{\boldsymbol{\theta}} + 2\,ln\,\mathbf{r} = \mathbf{C}_1 = \text{constante}$$

$$ln\,\dot{\boldsymbol{\theta}} + ln\,\mathbf{r}^2 = \mathbf{C}_1 = \text{constante}$$

$$ln(\dot{\boldsymbol{\theta}}\cdot\mathbf{r}^2) = \mathbf{C}_1 = \text{const.}$$

introduzindo a constante 1/2 $$ln(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}\cdot\mathbf{r}^2) = \mathbf{C}_2 = \text{const.}$$

portanto ⇒ $$\frac{1}{2}\cdot\mathbf{r}^2\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}} = e^{c_2} = \text{constante}$$

que não é outra coisa senão a velocidade areolar do ponto **m** na sua trajetória, como podemos observar na figura 2:

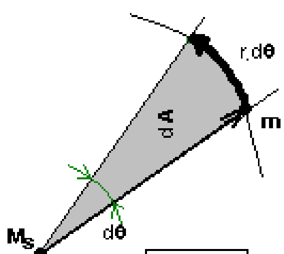


Figura 2

- Se a velocidade areolar é constante, então:

"os planetas varrem áreas iguais em tempos iguais" .

A área do triângulo será:

$$d\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}\cdot\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\,d\,\boldsymbol{\theta}$$

$$d\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}\cdot\mathbf{r}^2\cdot d\,\boldsymbol{\theta}$$

Vamos fazer agora algumas considerações energéticas. Para isto definimos:

$\vec{\mathbf{r}}$ = raio vetor

$\mathbf{m}$ = massa

$\vec{\mathbf{p}}$ = quantidade de movimento LINEAR = $\mathbf{m}\cdot\vec{\mathbf{v}}$

$\vec{\mathbf{L}}$ = quantidade de movimento angular ou momento da quantidade de movimento linear = $\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{p}}$

chamando a $\dfrac{\vec{\mathbf{L}}}{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{l}}$ temos que $\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = \dfrac{1}{\mathbf{m}}(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}) = \dfrac{1}{\mathbf{m}}(\vec{\mathbf{r}} \times \mathbf{m}\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$

mas a metade do modulo de $\vec{\mathbf{l}}$ vale $\dfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}| = \dfrac{1}{2}\mathbf{r}^2\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dfrac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{t}} = \dot{\mathbf{A}}$

logo $\dfrac{1}{2}\mathbf{l} = \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{1}{2}\mathbf{r}^2\dot{\boldsymbol{\theta}}$

ou $\dfrac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}} = \mathbf{r}^2\dot{\boldsymbol{\theta}}$ que como sabemos = constante, portanto

$$\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}} = \text{constante} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{mr}^2} \Rightarrow \mathbf{r}^2\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}} \qquad [3a]$$

podemos determinar agora a partir da [3a] o valor de $\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2$ pois

$$\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 = \frac{(\mathbf{r}^2\dot{\boldsymbol{\theta}})^2}{\mathbf{r}^3} = \frac{\left(\dfrac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)^2}{\mathbf{r}^3}$$

$$\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 = \frac{\mathbf{L}^2}{\mathbf{m}^2\mathbf{r}^3} \qquad [4]$$

Logo, para resolver a equação diferencial [1] , já temos o valor $\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2$ porém falta conhecermos o valor de $\ddot{\mathbf{r}}$. Para isto, e voltando agora à aceleração radial:

$$\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 = -\mathbf{G}\frac{\mathbf{M_s}}{\mathbf{r}^2} \qquad [5]$$

observamos que

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \frac{d\mathbf{r}}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{mr}^2}$$

$$= \frac{d\mathbf{r}}{\mathbf{r}^2} \cdot \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}\,d\boldsymbol{\theta}}$$

$$= -d\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right) \cdot \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}\,d\boldsymbol{\theta}}$$

$$= -\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}} \cdot \frac{d}{d\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right)$$

logo

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{d\mathbf{t}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\mathbf{t}}$$

$$= \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \frac{d}{d\boldsymbol{\theta}}\left(-\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}} \cdot \frac{d}{d\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right)\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{mr}^2}\right)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{L}^2}{\mathbf{m}^2\mathbf{r}^2} \cdot \frac{d^2}{d\boldsymbol{\theta}^2}\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right) \qquad [6]$$

Agora, substituímos [6] e [4] na eq. diferencial [5] e obtemos então:

$$\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 = -\mathbf{G}\frac{\mathbf{M_s}}{\mathbf{r}^2}$$

$$-\frac{\mathbf{L}^2}{\mathbf{m}^2\mathbf{r}^2} \cdot \frac{d^2}{d\boldsymbol{\theta}^2}\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right) - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{L}^2}{\mathbf{m}^2\mathbf{r}^4} = -\mathbf{G}\frac{\mathbf{M_s}}{\mathbf{r}^2}$$

$$\frac{\mathbf{L}^2}{\mathbf{m}^2} \cdot \left[\frac{d}{d\boldsymbol{\theta}^2}\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right) + \frac{1}{\mathbf{r}}\right] = \mathbf{GM_s}^2$$

ou seja
$$\frac{d^2}{d\boldsymbol{\theta}^2}\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right) + \frac{1}{\mathbf{r}} = \mathbf{G}\frac{\mathbf{M_s m}^2}{\mathbf{L}^2}$$

Fazendo $\mathbf{z} = \frac{1}{\mathbf{r}}$ e substituindo, chegamos a uma equação diferencial [7] de fácil resolução:

$$\frac{d^2}{d\boldsymbol{\theta}^2}\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right) + \frac{1}{\mathbf{r}} = \mathbf{G}\frac{\mathbf{M_s m}^2}{\mathbf{L}^2}$$

$$\frac{d^2\mathbf{z}}{d\boldsymbol{\theta}^2} + \mathbf{z} = \mathbf{G}\frac{\mathbf{M_s m}^2}{\mathbf{L}^2}$$

$$[7] \qquad \mathbf{z}'' + \mathbf{z} = \mathbf{G}\frac{\mathbf{M_s m}^2}{\mathbf{L}^2}$$

A solução geral da equação [7] compõe-se de duas soluções; a solução homogênea z_h que provém de resolver $z'' + z = 0$, e a solução particular $z_p = \frac{GM_s m^2}{L^2}$.

- Solução homogênea:

$$z_h = e^{\alpha\theta}(C_1 \cos\beta\theta + C_2 \, sen\, \beta\theta) \qquad \text{onde } \alpha = 0 \quad e \quad \beta = 1$$

ou seja $$z_h = C_1 \cos\theta + C_2 \, sen\, \theta$$

introduzindo agora as constantes θ_0 e Q de forma que:

$$C_1 = Q\cos\theta_0 \quad e \quad C_2 = Q\, sen\, \theta_0 \qquad \tan\theta_0 = \frac{C_2}{C_1}$$

chegamos a

$$z_h = Q\cos(\theta - \theta_0)$$

- Solução particular:

$$z_p = G\frac{M_s m^2}{L^2}$$

- Solução completa:

$$z = z_h + z_p = Q\cos(\theta - \theta_0) + G\frac{M_s m^2}{L^2}$$

de forma que

$$\frac{1}{r} = Q\cos(\theta - \theta_0) + G\frac{M_s m^2}{L^2}$$

operando chegamos a

$$\frac{1}{r} = \left[\frac{L^2 Q}{GM_s m^2}\cos(\theta - \theta_0) + 1\right]G\frac{M_s m^2}{L^2}$$

ou seja

$$r = \frac{L^2 / GM_s m^2}{1 + \frac{L^2 Q}{GM_s m^2}\cos(\theta - \theta_0)} \qquad [8]$$

que obviamente corresponde à equação de uma cônica (Figura 3), cuja fórmula geral é:

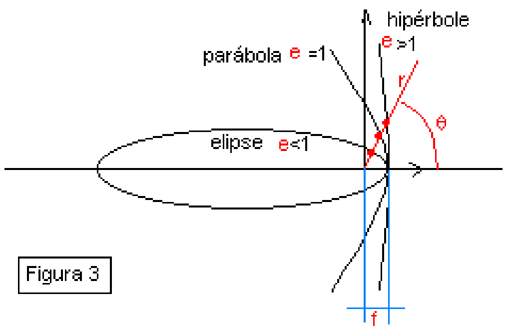


Figura 3

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

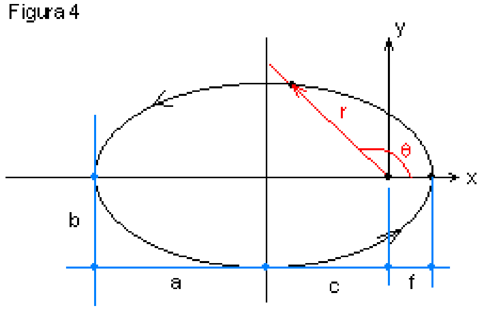
$$p = (1+e)f \qquad [8aa]$$

ou seja que:

$$(1+e)f = L^2 / GM_s m^2 \qquad [8\ a]$$

5. CONSIDERAÇÕES PARA AS ÓRBITAS ELÍPTICAS

Figura 4



Os parâmetros da elipse na Figura 4 são:

a: semi-eixo maior

b: semi-eixo menor

$c=a^2-b^2$

e: excentricidade = c/a

f: distância focal = $a(1-e)$

A: área da elipse = π**ab**= $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$

T: período para uma revolução

A equação da elipse em coordenadas cartesianas é:	A equação da elipse em coordenadas polares é:
$\frac{(x+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \qquad p=\frac{b^2}{a}=a(1-e^2)$

A velocidade com que o raio vetor **r** varre a área da órbita vale:

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \qquad \text{mas} \quad \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{L}{2m} = \text{constante}$$

ou seja $$\dot{A} = \frac{L}{2m} \quad [9]$$

se agora integramos a [9] no tempo **T** obteremos a superfície total **A**:

$$A = \int_0^T \dot{A}\,dt = \int_0^T \frac{L}{2m}dt = \frac{L}{2m}\int_0^T dt = \frac{L}{2m}T$$

$$A = \pi a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{LT}{2m}$$

agora vamos isolar **T**:

$$\therefore \quad T = \frac{2m\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{L}$$

agora vamos a calcular $\mathbf{T}^2$ lembrando que $f(1+e) = \dfrac{L^2}{GM_s m^2}$, ou seja:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_s} \quad [10]$$

porém para o sistema solar, $\mathbf{M_s}$=massa solar, **a**=distância média do planeta ao sol, **T**=seu período de revolução.

Olhando a eq. [10] é óbvio que a quantidade $\dfrac{4\pi^2}{GM_s}$ é uma constante para todos os planetas do sistema solar. Assim temos que $\dfrac{T_1^2}{a_1^3} = \dfrac{T_2^2}{a_2^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_s}$ onde os subíndices 1,2, representam os diferentes planetas. Tal é a 3ª. Lei de Kepler:

"Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são inversamente proporcionais às distâncias medias do sol".

6. CÁLCULO DA POSIÇÃO NA ÓRBITA ELÍPTICA

Até agora descobrimos a função **r**=**r**(θ), de forma que sabemos qual será o tipo de curva descrita pelo ponto **m** porém, falta conhecermos qual a função que determina as variações de θ em função do tempo **t**, isto é, a função θ =θ(**t**). Vamos desvendar o mistério...

Sabemos que para a elipse, em coordenadas polares, a posição do ponto de massa **m** está definida pela relação **r**(θ), porém não conhecemos a dependência dos parâmetros **r** e θ em função do tempo **t**. Vamos deduzi-las então:

a velocidade areolar é:

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{L}{2m}$$

portanto, após ter descrito um ângulo θ na trajetória, em um tempo **t**, o ponto **m** terá varrido a área **A θ** que será a resultante de integrarmos:

$$A_\theta = \int_0^{A_\theta} dA = \int_0^t \dot{A}\,dt = \int_0^t \frac{L}{2m}dt = \frac{L}{2m}\int_0^t dt = \frac{L}{2m}t$$

porém para termos os limites de integração em função de **θ** :

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{ou seja} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

e eliminando dt:

$$\therefore \quad dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta \qquad \text{que agora podemos integrar}$$

portanto $A_\theta = \int_0^{A_\theta} dA = \int_0^{\theta}\frac{1}{2}r^2\,d\theta \qquad = \frac{Lt}{2m}$ [11]

Substituindo $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ na integral acima e <u>multiplicando por 2</u>, temos:

$$\left(\frac{L}{m}\right)\cdot t \quad = \quad \int_0^{\theta} r^2\,d\theta \quad = \quad \int_0^{\theta}\frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e\cos\theta)^2}d\theta =$$

então

$$= a^2(1-e^2)^2\int_0^{\theta}\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}d\theta$$

$$= a^2(1-e^2)^2\left\{\frac{e\sin\theta}{(e^2-1)(1+e\cos\theta)} - \frac{1}{(e^2-1)}\int_0^{\theta}\frac{1}{(1+e\cos\theta)}d\theta\right\} =$$

$$= \frac{a^2(1-e^2)^2}{(e^2-1)}\left\{\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \int_0^{\theta}\frac{1}{(1+e\cos\theta)}d\theta\right\}$$

porém para a elipse ⇒ **e < 1** ⇒ **e^2 < 1** logo a solução da $\int_0^\theta \frac{1}{(1+\mathbf{e}\cos\theta)} d\theta$ será:

$$\int_0^\theta \frac{1}{(1+\mathbf{e}\cos\theta)} d\theta = \frac{2}{\sqrt{1-\mathbf{e}^2}} \arctan\left[\frac{1-\mathbf{e}}{\sqrt{1-\mathbf{e}^2}} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

logo

$$\frac{\mathbf{Lt}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{a}^2(1-\mathbf{e}^2)^2}{(e^2-1)} \left\{\frac{\mathbf{e}\sin\theta}{1+\mathbf{e}\cos\theta} - \frac{2}{\sqrt{1-\mathbf{e}^2}} \arctan\left[\frac{1-\mathbf{e}}{\sqrt{1-\mathbf{e}^2}} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\} =$$

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)\mathbf{t} = -\mathbf{a}^2(1-\mathbf{e}^2)\left\{\frac{\mathbf{e}\sin\theta}{1+\mathbf{e}\cos\theta} - \frac{2}{\sqrt{1-\mathbf{e}^2}} \arctan\left[\sqrt{\frac{1-\mathbf{e}}{1+\mathbf{e}}} \tan\left(\theta/2\right)\right]\right\} \quad [12]$$

Esta fórmula é muito bonita porém, o resultado obtido é o inverso que desejávamos, na verdade nós queríamos θ =θ (**t**) e acabamos obtendo **t**=f(θ). É fácil observar que despejar θ nos leva a uma equação muito complexa, ou seja, devemos encontrar outro método.

Introduzimos agora uma quantidade auxiliar **E** denominada ***anomalia excêntrica***, que cumpre

a seguinte condição:

$$\tan\left(\mathbf{E}/2\right) = \sqrt{\frac{1-\mathbf{e}}{1+\mathbf{e}}} \tan\left(\theta/2\right) \quad [12a]$$

que eqüivale a dizer que

$$\theta = 2\arctan\left[\sqrt{\frac{1+\mathbf{e}}{1-\mathbf{e}}} \tan\left(\mathbf{E}/2\right)\right]$$

então introduzindo a [12a] na [12], temos:

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)\mathbf{t} = -\mathbf{a}^2(1-\mathbf{e}^2)\left[\frac{\mathbf{e}\,sen\,\theta}{1+\mathbf{e}\cos\theta} - \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1-\mathbf{e}^2}}\right] \quad [13]$$

entretanto se pode demonstrar que para a quantidade auxiliar **E** introduzida:

$$sen\,\mathbf{E} = \frac{\sqrt{1-\mathbf{e}^2}}{1+\mathbf{e}\cos\theta} \cdot sen\,\theta$$

$$\text{de forma que} \quad \frac{sen\,\mathbf{E}}{\sqrt{1-\mathbf{e}^2}} = \frac{sen\,\theta}{1+\mathbf{e}\cos\theta}$$

substituindo esta última na [13] chegamos a:

$$\left(\frac{L}{m}\right)t = -a^2(1-e^2)\left[\frac{e\,sen\,\theta}{1+e\cos\theta} - \frac{E}{\sqrt{1-e^2}}\right] =$$

$$\left(\frac{L}{m}\right)t = -a^2(1-e^2)\left[\frac{e\,sen\,E}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{E}{\sqrt{1-e^2}}\right] = -\frac{a^2(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2}}\left[e\,sen\,E - E\right]$$

logo

$$\left(\frac{L}{m}\right)t = a^2\sqrt{1-e^2}\,(E - sen\,E) \quad [14]$$

- Vamos definir agora as constantes para o cálculo prático, como:

$$\frac{L}{m} = \frac{2\pi ab}{T} = \text{constante} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T} \quad [15]$$

para o planeta Terra ⇒ **T**=**T$_t$** e **a$_t$**= 1 ua (unidade astronômica),

⇒ logo para um planeta qualquer com **T**, **a**, temos (aplicando [10]) que:

$$\frac{a_t^3}{a^3} = \frac{T_t^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{a_t^3 a^{-3}}{T_T^2}} = \frac{a^{-3/2}}{T_T} \quad [16]$$

e substituindo a [16] na [15] obtemos: $\frac{L}{m} = \frac{2\pi\sqrt{1-e^2}\,a^2 a^{-3/2}}{T_T}$

ou seja que a [14] fica:

$$\left(\frac{L}{m}\right)t = a^2\sqrt{1-e^2}\,(E - e\,sen\,E)$$

$$\frac{2\pi\sqrt{1-e^2}\,a^2 a^{-3/2}}{T_T}t = a^2\sqrt{1-e^2}\,(E - e\,sen\,E)$$

$$\frac{2\pi a^{-3/2}}{T_T}t = E - e\,sen\,E \quad [17]$$

Esta última fórmula é básica, pois é a empregada no cálculo das efemérides.

As seguintes denominações são as usuais:

θ = anomalia verdadeira [radianos] = $2\arctan\left[\sqrt{\frac{1+\mathbf{e}}{1-\mathbf{e}}}\tan\left(\mathbf{E}/2\right)\right]$ [18]

E = anomalia excêntrica = $2\arctan\sqrt{\frac{1-\mathbf{e}}{1+\mathbf{e}}}\tan\left(\theta/2\right)$ [radianos]

a = distancia média ao sol [ua] (unidades astronômicas)

n = movimento diurno médio = $\frac{2\pi\mathbf{a}^{-3/2}}{T_T}$ [radianos/dia]

n = **k** $\mathbf{a}^{-3/2}$ onde **k**=constante de Gauss= $\frac{2\pi}{365.256}\left[\frac{\text{radianos}}{\text{dia}}\cdot \text{ua}^{-3/3}\right]$ [18a]

M = anomalia média = **n** Δt [19]

M = E - e sen (E) [radianos] **[20]** **(fórmula de Kepler)**

logo as fórmulas reduzem-se a:

$$\mathbf{M} = \mathbf{n}\,t$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{E} - \mathbf{e}\,\mathrm{sen}\,(\mathbf{E})$$

sendo *t = tempo após passo pelo periélio, em dias.*

$\mathbf{T_T}$ = ano trópico = 365.256374 dias

O processo de cálculo se reduz a determinar a anomalia média **M** [19], e de posse desta procedermos a calcular a anomalia excêntrica **E** que satisfaz a equação de Kepler [20], logo calculamos θ segundo a [18]. Com θ calculamos **r** , o que determina a posição do ponto **m** na órbita. A resolução da Equação de Kepler é realizada por iterações sucessivas, de forma que o algoritmo de cálculo é o seguinte:

Δ t=T-T_0 onde T_0 e a data da última passagem pelo periélio

a = distância média ao sol

<u>Nota</u>: Normalmente o tempo da passagem T_0 está dado em dias Julianos J_D, de forma que a data de calcula também está em dias julianos e o cálculo de Δ t se reduz apenas a encontrar a diferença (em dias julianos) entre T e T_0.

O diagrama de fluxo do algoritmo é:

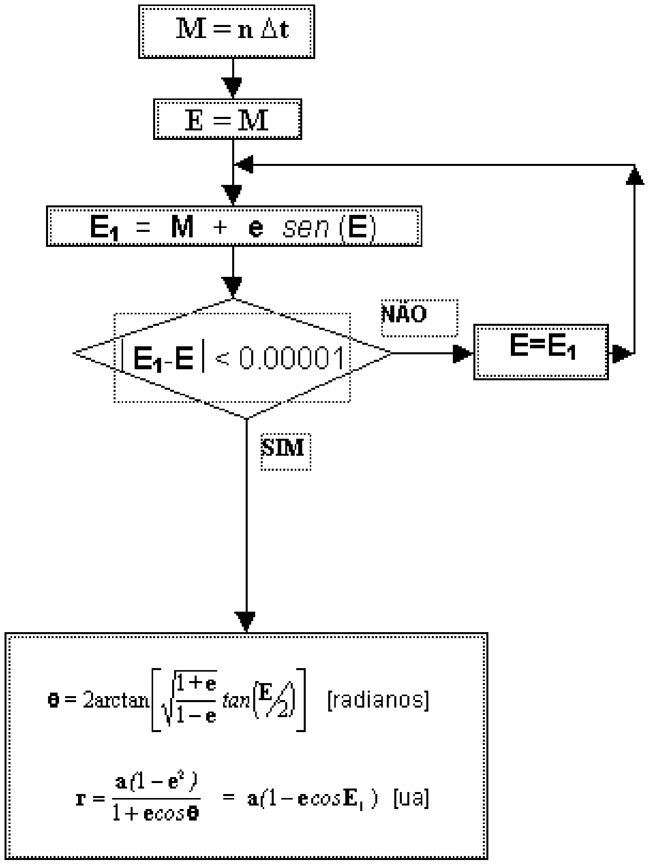
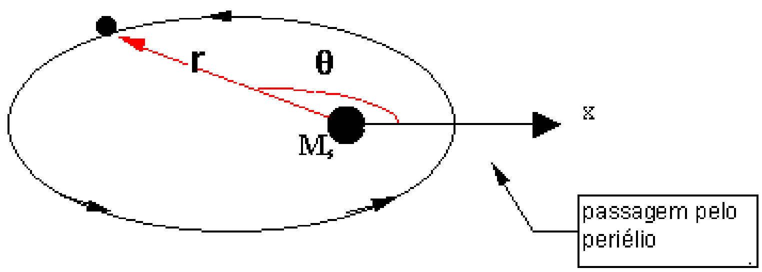


Figura 5



Vamos fazer um exemplo de aplicação: caso Júpiter

a = 5.208174 ua ; e = 0.049284

T = 2450896.510556 dj =24 Março 1998

T_0 = 2446966.84378 dj =24 Junho 1987 (periélio)

Δ t = 3929.666776 dj

n = 0.00144728573606

M = n Δ t = 5.687350672374 radianos (=325°.861190138)

E=M= 5.687350672374

E_1=M+e senE= 5.659692503366

E_1-E= -0.0276581690088

E=E_1= 5.659692503366

E_1=M+e senE=5.658575010

E_1-E=-0.001117493

E=E_1=5.658575010

E_1=M+e senE=5.658530316

E_1-E=-0.000044694

E=E_1=5.688530316

E_1=M+e senE=5.658528529

E_1-E=-0.000001787

E=E_1=5.658528529

e como sen**E** = $\frac{2\tan\left(\mathbf{E}/2\right)}{1+\tan^2\left(\mathbf{E}/2\right)}$ =-0.584818898 $\Rightarrow$ <0 $\Rightarrow$ estamos no IV quadrante!

$\boldsymbol{\theta}_0 = 2\mathrm{Arctan}\left[\sqrt{\frac{1+\mathbf{e}}{1-\mathbf{e}}}\tan\left(\mathbf{E}/2\right)\right]$ = -0.654082984

$\theta = 2\pi + \theta_0 = 2\pi + (-0.654082984)$ = **5.629102324 radianos** = **322° .5238**

logo $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}(1-\mathbf{e}^2)}{1+\mathbf{e}\cos\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{a}(1-\mathbf{e}\cos\mathbf{E}_1)$ = **4.999964739 ua**

Segundo a efemérides, para a data 24/03/1998, a anomalia média vale 325° 33′35 ″ , a distância ao sol é 5.00079 ua. Comparando com nossos valores, nossa anomalia média foi 325° 51′40″ , e a distância 4.999964739 ua (uma diferença de 0.016%). Vale a pena lembrar que na data da passagem pelo periélio existia uma imprecisão quanto a hora, se a tivéssemos sabido, a diferença seria ainda menor! Também, se considerarmos que

Júpiter dá uma volta em 11.86 anos, desde o periélio até a data de cálculo passaram-se 10.758 anos, ou seja um pouquinho menos de 1 revolução, o que concorda com nossos cálculos.

Após conhecermos a posição na órbita, e sabendo os parâmetros orbitais (ι: inclinação da órbita respeito da eclíptica, Ω : longitude do nodo ascendente e ω : argumento do periélio) podemos passar das coordenadas polares para as retangulares (coordenadas heliocêntricas orbitais), para as heliocêntricas eclípticas, e conhecendo a posição da Terra (em coordenadas heliocêntricas eclípticas, a diferença nos dá o vetor Terra-Júpiter, ou seja as coordenadas geocêntricas eclípticas de Júpiter, então apenas falta uma última passagem, para as coordenadas geocêntricas equatoriais (**r**: distância Terra-Júpiter , α: ascensão reta, δ: declinação). Tais cálculos efetuam-se empregando matrizes e análise vetorial (fórmulas de Euler).

Para facilitar o cômputo da anomalia verdadeira e a determinação do quadrante em questão, talvez resulte mais útil o emprego das seguintes fórmulas, lembrando que a fórmula:

$\boldsymbol{\theta}_0 = 2\mathrm{Arctan}\left[\sqrt{\frac{1+\mathbf{e}}{1-\mathbf{e}}}\,tan\left(\mathbf{E}/2\right)\right]$ retorna o argumento θ no seu valor principal, ou seja θ_0, no I e IV quadrantes.

$$cos\,\boldsymbol{\theta} = \frac{cos\,\mathbf{E} - \mathbf{e}}{1 - \mathbf{e}\,cos\,\mathbf{E}} \quad sen\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\sqrt{1-\mathbf{e}^2}\,sen\,\mathbf{E}}{1 - \mathbf{e}\,cos\,\mathbf{E}}$$

Assim:

$cos\theta = 0$ $sen\,\theta > 0$ $\theta = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 = 90°$

$cos\theta = 0$ $sen\,\theta < 0$ $\theta = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 = 270°$

$cos\theta > 0$ $sen\,\theta > 0$ $\theta = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 > 0°$ $0° < \theta < 90°$

$cos\theta < 0$ $sen\,\theta > 0$ $\theta = 180° + \theta_0 \Rightarrow \theta_0 < 0°$ $90° < \theta < 180°$

$cos\theta < 0$ $sen\,\theta < 0$ $\theta = 180° + \theta_0 \Rightarrow \theta_0 > 0°$ $180° < \theta < 270°$

$cos\,\theta > 0$ $sen\,\theta < 0$ $\theta = 360° + \theta_0 \Rightarrow \theta_0 < 0°$ $270° < \theta < 360°$

Também, na hora dos cálculos, devemos observar o seguinte:

- O movimento diurno médio $\mathbf{n} = \mathbf{k}\,\mathbf{a}^{-1.5}$ pode ser expressado tanto em [radianos / dia] como em [° / dia]. Ou seja, a *constante de Gauss **k***, pode ser expressada em:

  k = 2π / 365.2564 [radianos / dia]

  k = 360° / 365.2564 [° / dia]

- A anomalia média **M** = **n** Δt poderá então estar expressada em [radianos] ou [°]. Normalmente as tabelas ou efemérides proporcionam **M** em [°].
- Para o cálculo da Equação de Kepler, é obrigatório o emprego de **M** em [radianos], e o valor de **E** obtido também está em radianos. Se é desejado se pode converter **E** para [°] e calcular os valores de seno, coseno e tangente; entretanto se **E** não estiver dentro de uma função trigonométrica, então **E** deverá ser tomada em radianos!

- Se a última passagem pelo periélio ocorreu há mais de um período do planeta, então o cômputo da anomalia média certamente dará um valor superior a 360° ou 2π radianos (6.2831853...). Neste caso é melhor reduzirmos a anomalia mé dia para o valor fracionário de um giro completo. Expressando **M** em radianos ou graus sexagesimais, esto se reduz à seguinte fórmula:

$$M_{cálculo}\{radianos\} = \left[\left(\frac{M}{2\pi}\right) - IP\left(\frac{M}{2\pi}\right)\right]\cdot 2\pi \qquad M_{cálculo}\{°\} = \left[\left(\frac{M}{360°}\right) - IP\left(\frac{M}{360°}\right)\right]\cdot 360°$$

onde **IP** representa a função que nos dá a parte inteira do argumento contido.
Vejamos um exemplo:

Se **M** = 9.28 radianos = 531° .7048339, então

$\mathbf{M_{cálculo}}$\{rad\} = [(9.28/2π) - IP(9.28/2π)]2π = [1.4769579 - 1]2π =

= [0.4769579]2 π = <u>2.9968147 rad</u>

$\mathbf{M_{cálculo}}$ { °} = [(531° .7048339/360°) - IP(531.7048339/360 °)]360° = [1.4769579 - 1]360° =

= [0.4769579] 360 ° = <u>171° .7048339</u>

- **logo é evidente que 2.9968147 radianos = 171 °.7048339**

7. CONSIDERAÇÕES SOBRE A CONSTANTE DE GAUSS, O MOVIMENTO DIURNO MÉDIO E A FÓRMULA DE KEPLER

- ### CONSTANTE DE GAUSS E MOVIMENTO DIURNO MÉDIO

Dada a equação [14] : $\left(\frac{L}{m}\right)t = a^2\sqrt{1-e^2}\,(E - sen\,E)$, e como:

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} - sen(\mathbf{E}) = \frac{2\pi}{T}\cdot t$$

$$\mathbf{A_{elipse}} = \pi\,\mathbf{ab} = \pi\, a^2\sqrt{1-e^2}$$

$$\left(\frac{L}{m}\right)t = 2\mathbf{A_t}$$ (sendo $\mathbf{A_t}$ a área varrida até o instante **t**)

resulta que a equação [14] eqüivale a:

$$2A_t = \frac{A_{elipse}}{\pi}\cdot M \quad [20a]$$

que encontramos foi a expressão do dobro da área orbital varrida em um tempo **t** desde o periélio. Por outro lado, se na eq. [20a] isolamos **M** obtemos a eq. [20aa], logo podemos derivar a eq. [20aa]:

$$M = 2\pi\cdot\left(\frac{A_t}{A_{elipse}}\right) \quad [20aa] \Rightarrow \quad A_t = A_{elipse}\cdot\left(\frac{t}{T}\right) \quad [20aaa]$$

Prestando atenção na equação [20aa] vemos que o quociente $\left(\frac{A_t}{A_{elipse}}\right)$ não é outra coisa senão a expressão em forma de % da área varrida respeito da área total; porém, **M** é um ângulo dependente dp tempo **t**, de forma que o produto 2π .% dá um ângulo proporcional à área varrida, ou seja ao tempo **t.** Isto faz pensar num movimento circular. Na eq. [20aaa] verificamos a proporcionalidade entre o tempo **t** do movimento circular e a área varrida $\mathbf{A_t}$ (pois a velocidade angular é constante na circunferência), ou seja, se falamos de um setor circular varrido em um tempo **t** igual a 25% do período **T** obtemos 25% da área do círculo, então o ângulo do setor será 25%.2π = π/4 radianos ou 25%.360 ° = 90° . Estas considerações levam a pensar que talvez **M** esteja relacionado com algum tipo de circunferência auxiliar; ou seja, a órbita e circular e a velocidade angular é constante. Quando tratarmos da Equação de Kepler veremos que esta idéia é absolutamente válida.

Analisemos agora as dimensões da constante **L**/**m**. O momento da quantidade de movimento [**L**] tem a dimensão { $m.kg\frac{m}{s}$ }, a massa [**m**] ={kg}, de forma que a dimensão do quociente {**L**/**m**} é {m^2/s}, que multiplicado pelo tempo **t** nos dá uma superfície. Isto resulta bastante claro se observamos o membro direito da equação [14], onde o único fator não adimensional é o semi-eixo maior da órbita **a** elevado ao quadrado. Ë claro que pouco interessa se **a** está em metros ou unidades astronômicas, a superfície será sempre {m^2} ou {ua^2}.

Examinando agora a equação de Kepler, seja na sua forma dada pela equação [17], segundo a qual: $\frac{2\pi}{T_T}a^{-3/2}t = E - e\,sen\,E$, ou na sua forma dada pela equação [20], segundo a qual: **M** = **E** - *sen* (**E**) , vemos que não existe fator dimensional, exceto o valor 2 π , que está expressado em radianos, ou como já vimos antes, em graus sexagesimais (não esquecer que para operar no lado direito da expressão devemos trabalhar em radianos!).

Ë interessante entender o que significa a ***constante de Gauss:***

Vamos igualar a eq. [14]: $\left(\frac{L}{m}\right)t = a^2\sqrt{1-e^2}\,(E - sen\,E)$, com a [20]: **n** Δt = **E** - *sen*(**E**), para isto tomamos a eq. [14] e isolamos **E** - *sen*(**E**), de modo que agora temos:

E - *sen*(**E**) = $\left[\frac{L/m}{a^2\sqrt{1-e^2}}\right]\cdot t$

comparando esta última com a eq. [20] chegamos a:

$$r = \frac{a\left(e^2 - 1\right)}{1 + e\,cos\,\theta}$$

ou seja:

$$\left[\frac{\left(\frac{L}{m}\right)}{a^2\sqrt{1-e^2}}\right] = n = k\cdot a^{-3/2} \qquad [21]$$

porém da eq. [8 a]: $(1+e)f = L^2/GM_sm^2$ deduzimos que :

$$L^2/m^2 = GM_s(1+e)f \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{m} = \sqrt{GM_s}\cdot\sqrt{(1+e)f} \qquad \text{e como} \quad (1+e)f = a(1-e^2)$$

então: $\frac{L}{m} = \sqrt{GM_s}\cdot\sqrt{a(1+e^2)}$, de forma que introduzindo este valor na equação [21] temos:

$$\left[\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{1-e^2}\cdot\sqrt{GM_s}}{a^2\sqrt{1-e^2}}\right] = n = k\cdot a^{-3/2}$$

$$a^{-3/2}\cdot\sqrt{GM_s} = n = k\cdot a^{-3/2} \qquad [22]$$

$$\sqrt{GM_s} = k \qquad [23]$$

por outro lado, da equação [10]: $T^2 = \frac{4\pi^2a^3}{GM_s}$ deduzimos que $GM_s = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}$ de forma que temos:

$\sqrt{GM_S} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{T}$, portanto a equação [22] do ***movimento diurno médio*** fica da seguinte forma:

$$n = a^{-3/2} \cdot \sqrt{GM_S} = a^{-3/2} \cdot 2\pi \frac{a^{3/2}}{T} = k \cdot a^{-3/2}$$

ou seja: $n = a^{-3/2} \cdot \sqrt{GM_S} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_T} a^{-3/2}$ [24]

do qual: $k = \sqrt{GM_S} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{T}$ [25]

portanto, uma maneira de encontrar **k** e utilizar os valores de **a** e **T** terrestres, de forma que se **a** = 1 ua, e **T** = $\mathbf{T_T}$, (atenção que para qualquer outro planeta, **k** se calcula pela [25]),então:

$$k = \sqrt{GM_S} = \frac{2\pi}{T_T} \quad [26]$$

tal como foi feito na [18a] quando introduzimos a ***constante de Gauss***.

Calculemos então o valor de **k** segundo a eq. [23], para isto devemos passar as unidades de [**G**]

= { $\frac{m^3}{kg\ s^2}$ } para { $\frac{ua^3}{kg\ dia^2}$ }, ou seja que se **G** [$\frac{m^3}{kg\ s^2}$] = **6.67 10^{-11}** $\frac{m^3}{kg\ s^2}$ então:

G [$\frac{ua^3}{kg\ dia^2}$] **= 6.67 10^{-11}** $\frac{m^3}{kg\ s^2}$ **(1ua/1.495979 10^{11} m) ^{3} (86400 s/dia)^2 =**

G [$\frac{ua^3}{kg\ dia^2}$] = **1.4872 10^{-34}** $\frac{ua^3}{kg\ dia^2}$

e como $\mathbf{M_S}$ = **1.991 10^{30} kg** então: ⇒**k** = $\sqrt{GM_S}$ = **0.0172076 ≈ 0.0172**

o que concorda com o valor introduzido pela equação [26] pois:

$$k = \frac{2\pi}{T_T} = 2\pi / 365.2564\ \text{dia} = 0.017202$$

Resumindo:

- O ***movimento diurno médio*** (**n**) não é senão uma expressão da velocidade angular média do planeta ($\bar{\dot{\theta}}$), que resulta de imaginar a sua órbita circular, de forma que $\bar{\dot{\theta}} = 2\pi/T$.

  A **anomalia média** (**M**), dá a idéia do ângulo do setor circular varrido até o instante **t**, se a órbita fosse circular.

- A ***constante de Gauss*** (**k**) é um valor constante para o sistema solar, portanto de igual valor para todos os planetas. Digamos que **k** quantifica a "grandeza gravitacional" do sol, pois **k** = $\sqrt{GM_s}$

, ou seja sua capacidade de influir gravitacionalmente sobre outras massas. Como dato interessante, esta "grandeza gravitacional", multiplicada pela distância média do planeta ao sol (elevada a 1.5), nos dá o ***movimento diurno mé dio***, ou seja como o planeta se comporta a essa distância do sol.

- ## A EQUAÇÃO DE KEPLER

Quando resolvemos a equação [12], introduzimos o parâmetro **E** tal que se cumpria a relação dada pela equação [12a] : $\tan\left(E/2\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\theta/2\right)$. Resta perguntar agora o que a eq. [12a] significa.

Vamos dar uma olhada na Figura 6:

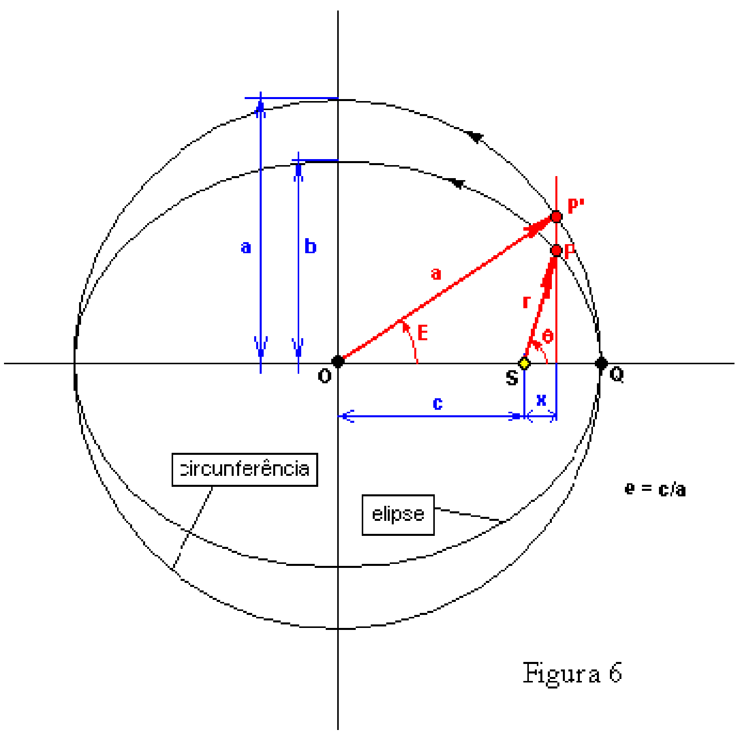


Figura 6

Nesta figura observamos o sol, dado pelo ponto **S**, a posição do planeta, dado pelo ponto **P**, na sua órbita elíptica de periélio **SQ**¸excentricidade **e**, e dimensões orbitais **a** e **b**. Agora traçamos uma órbita circular de raio **a** e centro **O**, que obviamente não coincide com **S**, nesta órbita circular temos um planeta imaginário, de idênticas caraterísticas a **P**, denominado **P'**.

Este planeta **P'** tem o mesmo período orbital **T** que **P** porém, movimenta-se com velocidade angular uniforme (já que a órbita é circular). Resulta evidente que a velocidade angular do planeta **P'** vale 2π /**T**, mas isto não é outra coisa senão o ***movimento diurno médio*** *do planeta* **P**.

A posição do planeta **P** em coordenadas polares de centro **S** está definida pela ***anomalia verdadeira*** (θ), e o ***raio vetor*** (***r***). A posição do planeta **P** em coordenadas polares de centro **O**(excêntrico respeito de **S**) está definida pela ***anomalia excêntrica*** (***E***), e o ***raio vetor*** (***a***).

Vamos demonstrar agora a correspondência entre as posições de **P** e **P'** tal como mostradas na Figura 6. Analisando a figura observamos que a componente horizontal do raio vetor **a** de **P'**, vale **a***cos***E**. Este valor é igual à distância **c + x**, mas **c** = **ae**, e **x** = **r***cos* θ. Lembrando que **r** vale $\frac{\mathbf{a}(1-\mathbf{e}^2)}{1+\mathbf{e}\cos\theta}$ (elipse com o centro de coordenadas polares centrado no foco direito), então podemos dizer que: $\mathbf{a}\cos\mathrm{E} = \mathbf{ae} + \frac{\mathbf{a}(1-\mathbf{e}^2)\cos\theta}{1+\mathbf{e}\cos\theta}$.

Após operarmos nesta igualdade podemos encontrar o valor de *cos***E**, ou seja:

$$\cos\mathrm{E} = \frac{\mathbf{e}+\cos\theta}{1+\mathbf{e}\cos\theta} \qquad [27]$$

Lembrando das funções trigonométricas que $\tan\left(\mathrm{E}/2\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\mathrm{E}}{1+\cos\mathrm{E}}}$, podemos introduzir a equação [27] nesta última, de forma que:

$$\tan\left(\mathrm{E}/2\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\mathrm{E}}{1+\cos\mathrm{E}}} = \sqrt{\frac{1+\mathbf{e}\cos\theta-\mathbf{e}-\cos\theta}{1+\mathbf{e}\cos\theta+\mathbf{e}+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\mathbf{e})(1-\cos\theta)}{(1+\mathbf{e})(1+\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{1-\mathbf{e}}{1+\mathbf{e}}}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$\text{mas } \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \tan\left(\theta/2\right) \text{ assim:} \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\mathrm{E}/2\right) = \sqrt{\frac{1-\mathbf{e}}{1+\mathbf{e}}}\tan\left(\theta/2\right)$$

que é precisamente a equação [12a], tal como queríamos demonstrar. Agora sabemos o real significado do conceito ***anomalia excêntrica***.

8. CÁLCULO DE ÓRBITAS NÃO ELÍPTICAS: ÓRBITAS PARABÓLICAS E HIPERBÓLICAS

- ### CÁLCULO DAS ÓRBITAS PARABÓLICAS

Quando chegamos à equação [8aa] que nos dava a fórmula geral da cônica, continuamos nosso raciocínio assumindo que 0 < **e** < 1, logo, para chegar até a equação de Kepler, introduzimos o valor de **r** n? cálculo da integral dada pela equação [11]. Para o caso das órbitas parabólicas, sabemos que **e** = 1, porém vamos refazer a integração da [11] considerando a equação da parábola (que resulta de introduzir **e**=1 na eq. [8aa]).

Vejamos a Figura 7: a distância focal **SQ** do sol à passagem pelo periélio, foi chamada de **f**; a excentricidade da elipse vale **e** = 1, assim colocando estes dados na equação [8aa]:

$\mathbf{r} = \frac{(1+\mathbf{e})\mathbf{f}}{1+\mathbf{e}\cos\boldsymbol{\theta}}$, chegamos a equação da órbita parabólica: $\mathbf{r} = \frac{2\mathbf{f}}{1+\cos\boldsymbol{\theta}}$. Agora, apenas por uma questão de nomenclatura, denominamos à distância focal **f** de **q**, ou seja **q** = **f**.

Portanto a equação da parábola é:

$$\mathbf{r} = \frac{2\mathbf{q}}{1+\cos\boldsymbol{\theta}} \qquad [28]$$

Agora vamos fazer a integração: $2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)\cdot\mathbf{t} = \int_0^{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{r}^2\, d\,\boldsymbol{\theta}$, introduzindo o valor de **r** dado pela eq. [28].

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)\cdot\mathbf{t} = \int_0^{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{r}^2\, d\,\boldsymbol{\theta} = \int_0^{\boldsymbol{\theta}} \frac{4\mathbf{q}^2}{(1+\cos\boldsymbol{\theta})^2} d\,\boldsymbol{\theta} = 4\mathbf{q}^2\cdot\left[\frac{1}{2}\tan\left(\boldsymbol{\theta}/2\right) + \frac{1}{6}\tan^3\left(\boldsymbol{\theta}/2\right)\right]$$
$$= 2\mathbf{q}^2\cdot\left[\tan\left(\boldsymbol{\theta}/2\right) + \frac{1}{3}\tan^3\left(\boldsymbol{\theta}/2\right)\right]$$

porém como

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right) = \sqrt{\mathbf{GM_S}}\cdot\sqrt{(1+\mathbf{e})\mathbf{f}} \quad \text{e na parabola } \mathbf{e} = 1 \text{ e } \mathbf{f} = \mathbf{q} \text{ resulta que:}$$
$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right) = \sqrt{\mathbf{GM_S}}\cdot\sqrt{2}\cdot\mathbf{q}^{1/2}$$

então:

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)\cdot\mathbf{t} = 2\mathbf{q}^2\cdot\left[\tan\left(\boldsymbol{\theta}/2\right) + \frac{1}{3}\tan^3\left(\boldsymbol{\theta}/2\right)\right]$$
$$\sqrt{\mathbf{GM_S}}\cdot\sqrt{2}\cdot\mathbf{q}^{1/2}\cdot\mathbf{t} = 2\mathbf{q}^2\cdot\left[\tan\left(\boldsymbol{\theta}/2\right) + \frac{1}{3}\tan^3\left(\boldsymbol{\theta}/2\right)\right]$$

isolando agora o termo das tangentes:

$$\left[\tan\left(\boldsymbol{\theta}/2\right) + \frac{1}{3}\tan^3\left(\boldsymbol{\theta}/2\right)\right] = \sqrt{\mathbf{GM_S}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\mathbf{q}^{1/2}}{\mathbf{q}^2}\cdot\mathbf{t} = \sqrt{\mathbf{GM_S}}\cdot\frac{\mathbf{q}^{-3/2}}{\sqrt{2}}\cdot\mathbf{t}$$

ou seja que:

$$\tan\left(\boldsymbol{\theta}/2\right) + \frac{1}{3}\tan^3\left(\boldsymbol{\theta}/2\right) = \sqrt{\mathbf{GM_S}}\cdot\frac{\mathbf{q}^{-3/2}}{\sqrt{2}}\cdot\mathbf{t} \qquad [29]$$

equação análoga a [17] no sentido que na sua resolução obtemos o valor de θ.

Neste caso temos que resolver uma equação cúbica em tan(θ/2). Pode-se demonstrar que esta equação tem uma raiz real (a que nos interessa) e duas imaginárias. Existem bastantes métodos de resolução. Propomos o ***Método de Newton***, que diz: *Se* x_0 *é um valor aproximado da raiz da função* ***f(x)=0*** então como aproximação mais exata se toma

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Substituindo agora $\mathbf{x_1}$ por $\mathbf{x_0}$ obtemos uma melhor aproximação $\mathbf{x_2}$.

Logo, para nosso problema (resolução da equação [29]):

- Para facilitar os cálculos:
  multiplicamos a eq. [29] por três e chamamos a *tan(θ/2)* = **E**, ou seja a equação [29] passa agora a ser: $\mathbf{E}^3 + 3\mathbf{E} - \mathbf{M} = 0$
- definimos **M** = **n** .**t**, onde **n** = $3 \cdot \sqrt{GM_s} \cdot \frac{q^{-3/2}}{\sqrt{2}} = 3 \cdot k \cdot \frac{q^{-3/2}}{\sqrt{2}}$ $\quad k = \text{constante de Gauss}$
- aplicamos o método de Newton, de forma que denominando $\mathbf{E_0}$ ao valor aproximado da raiz, o próximo valor será:

$$E_1 = E_0 - \frac{f(E_0)}{f'(E_0)} \quad \text{e como} \quad f(E) = 0 \;\Rightarrow\; f(E) = E^3 + 3E - M = 0 \qquad f'(E) = 3E^2 + 3 = 3(E^2 + 1)$$

logo:

$$E_1 = E_0 - \frac{E_0^3 + 3E_0 - M}{3(E_0^2 + 1)} = \frac{3E_0(E_0^2 + 1) - (E_0^3 + 3E_0 - M)}{3(E_0^2 + 1)} = \frac{3E_0^3 + 3E_0 - E_0^3 - 3E_0 + M}{3(E_0^2 + 1)} = \frac{2E_0^3 + M}{3(E_0^2 + 1)}$$

ou seja

$$E_{i+1} = \frac{2E_i^3 + M}{3(E_i^2 + 1)} \quad [29a]$$

Este valor será iterado até que $\mathbf{f(E_i) \approx 0}$, por exemplo até que $\mathbf{|\,f(E_i)\,| = 10^{-8}}$.

- A primeira aproximação, isto é $\mathbf{E_0}$, vale $\mathbf{E_0 = 0}$

- iteramos então de acordo ao seguinte algoritmo em QBASIC da Microsoft:

  10 **M** = **nt**
  20 **E** = 0
  30 $\mathbf{E_1} = 2\mathbf{E}^3 + \mathbf{M} / [3(\mathbf{E}^2 + 1)]$
  40 IF $|\,\mathbf{E_1}^3 + 3\mathbf{E_1} - \mathbf{M}\,| > 10^{-8}$ THEN
  50 **E** = $\mathbf{E_1}$: GOTO 30
  60 END IF
  70 θ = 2 . *Atan* (**E**)

- **CÁLCULO DAS ÓRBITAS HIPERBÓLICAS**

Neste caso se procede como no anterior, lembrando que se **e** > 1 então $\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{a}\left(\mathbf{e}^2-1\right)}{1+\mathbf{e}\cos\boldsymbol{\theta}}$ pois segundo a definição na hipérbole, **c > a ⇒ f = c - a ⇒ (1+e)f = (1+e)(e-1)a = a(e^2-1)**, logo:

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)\cdot\mathbf{t} = \int_0^{\theta}\mathbf{r}^2\,d\theta = \int_0^{\theta}\frac{\mathbf{a}^2(\mathbf{e}^2-1)^2}{(1+\mathbf{e}\cos\theta)^2}\,d\theta =$$

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)\cdot\mathbf{t} = \mathbf{a}^2\left(\mathbf{e}^2-1\right)^2\left[\frac{\mathbf{e}\,sen\,\theta}{\left(\mathbf{e}^2-1\right)\left(1+\mathbf{e}\cos\theta\right)} - \frac{1}{\left(\mathbf{e}^2-1\right)}\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\left(1+\mathbf{e}\cos\theta\right)}\right]$$

então:

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)\cdot\mathbf{t} = \mathbf{a}^2\left(\mathbf{e}^2-1\right)\left[\frac{\mathbf{e}\,sen\,\theta}{\left(1+\mathbf{e}\cos\theta\right)} - \left\{\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}^2-1}}\ln\left(\frac{(\mathbf{e}-1)\tan\left(\theta/2\right)+\sqrt{\mathbf{e}^2-1}}{(\mathbf{e}-1)\tan\left(\theta/2\right)-\sqrt{\mathbf{e}^2-1}}\right)\right\}\right] \quad [30]$$

Vamos agora fazer algumas considerações a respeito das funções trigonométricas hiperbólicas, para isto tomamos o fator dentro do logaritmo natural na equação [30]:

$$\frac{(\mathbf{e}-1)\tan\left(\theta/2\right)+\sqrt{\mathbf{e}^2-1}}{(\mathbf{e}-1)\tan\left(\theta/2\right)-\sqrt{\mathbf{e}^2-1}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\mathbf{e}-1}{\mathbf{e}+1}}\tan\left(\theta/2\right)+1}{\sqrt{\dfrac{\mathbf{e}-1}{\mathbf{e}+1}}\tan\left(\theta/2\right)-1}$$ e se $$\left|\sqrt{\frac{\mathbf{e}-1}{\mathbf{e}+1}}\tan\left(\theta/2\right)\right| > 1$$

então temos que:

$$\Rightarrow \quad \ln\left[\frac{\sqrt{\dfrac{\mathbf{e}-1}{\mathbf{e}+1}}\tan\left(\theta/2\right)+1}{\sqrt{\dfrac{\mathbf{e}-1}{\mathbf{e}+1}}\tan\left(\theta/2\right)-1}\right] = 2\,Arctanh\left(\sqrt{\frac{\mathbf{e}-1}{\mathbf{e}+1}}\tan\left(\theta/2\right)\right)$$

$$= 2\,Arctanh\left(\tanh\left(\mathbf{E}/2\right)\right) = \mathbf{E}$$

$$\text{logo chamando a } \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\left(\theta/2\right) = \tanh\left(\mathbf{E}/2\right)$$

resulta que: $$\ln\left[\frac{\sqrt{\dfrac{\mathbf{e}-1}{\mathbf{e}+1}}\tan\left(\theta/2\right)+1}{\sqrt{\dfrac{\mathbf{e}-1}{\mathbf{e}+1}}\tan\left(\theta/2\right)-1}\right] = \mathbf{E} \qquad [31]$$

podemos agora calcular o valor de *senh(**E**)*, ou seja:

$$senh(\mathbf{E}) = \frac{2\,tanh\left(\mathbf{E}/2\right)}{1 - tanh^2\left(\mathbf{E}/2\right)} = 2\,\frac{\sqrt{\mathbf{e}-1}}{\sqrt{\mathbf{e}+1}} \cdot \frac{sen\left(\theta/2\right)}{cos\left(\theta/2\right)} \cdot \frac{(\mathbf{e}+1)\,cos^2\left(\theta/2\right)}{(1+\mathbf{e}\,cos\,\theta)} = \frac{\sqrt{\mathbf{e}^2-1}\,sen\,\theta}{1+\mathbf{e}\,cos\,\theta}$$

logo se deduz que $\Rightarrow \quad \dfrac{sin\,\theta}{1+\mathbf{e}\,cos\,\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{e}^2-1}}\,senh\,\mathbf{E} \qquad [32]$

assim, introduzindo as equações [31] e [32] na equação [30] obtemos:

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{a}^2\left(\mathbf{e}^2-1\right)\left[\mathbf{e} \cdot \left(\frac{sen\,\theta}{(1+\mathbf{e}\,cos\,\theta)}\right) - \left\{\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}^2-1}}\,ln\left(\frac{(\mathbf{e}-1)\,tan\left(\theta/2\right) + \sqrt{\mathbf{e}^2-1}}{(\mathbf{e}-1)\,tan\left(\theta/2\right) - \sqrt{\mathbf{e}^2-1}}\right)\right\}\right]$$

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{a}^2\left(\mathbf{e}^2-1\right)\left[\mathbf{e} \cdot \left(\frac{senh\,\mathbf{E}}{\sqrt{\mathbf{e}^2-1}}\right) - \left\{\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}^2-1}}\,\mathbf{E}\right\}\right] = \mathbf{a}^2\,\frac{\left(\mathbf{e}^2-1\right)}{\sqrt{\mathbf{e}^2-1}}\left[\mathbf{e}\,senh\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\right]$$

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{a}^2\sqrt{\mathbf{e}^2-1} \cdot \left(\mathbf{e}\,senh(\mathbf{E}) - \mathbf{E}\right) \qquad [33]$$

lembrando agora que na equação geral das cônicas [8], o numerador representa o parâmetro **p** que vale (1+**e**)**f**, então, de acordo com a eq. [8a] obtemos, como principio geral para as órbitas cônicas:

$$\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}} = \sqrt{\mathbf{GM_s}} \cdot \sqrt{(1+\mathbf{e})\mathbf{f}} \qquad \text{e tinhamos feito } \mathbf{f} = \mathbf{q} \quad \text{entao}$$

$$\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}} = \sqrt{\mathbf{GM_s}} \cdot \sqrt{(1+\mathbf{e})\mathbf{q}}$$

porém na definição inicial de hipérbole tínhamos visto que $(1+\mathbf{e})\mathbf{f} = (1+\mathbf{e})\mathbf{q} = \mathbf{a}\left(\mathbf{e}^2-1\right)$, ou seja que:

$$\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}} = \sqrt{\mathbf{GM_s}} \cdot \sqrt{(1+\mathbf{e})\mathbf{q}} = \sqrt{\mathbf{GM_s}} \cdot \sqrt{\mathbf{a}\left(\mathbf{e}^2-1\right)}$$

$$\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}} = \sqrt{\mathbf{GM_s}} \cdot \sqrt{\left(\mathbf{e}^2-1\right)\mathbf{a}} \qquad [34]$$

de forma que introduzindo a eq. [34] na equação [33]:

$$\left(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)\cdot\mathbf{t} \;=\; \mathbf{a}^2\sqrt{\mathbf{e}^2-1}\cdot\left(\mathbf{e}\,senh(\mathbf{E})-\mathbf{E}\right) \qquad [33]$$

$$\sqrt{\mathbf{GM_s}}\,\sqrt{\mathbf{a}}\,\sqrt{\mathbf{e}^2-1}\cdot\mathbf{t} = \mathbf{a}^2\sqrt{\mathbf{e}^2-1}\left(\mathbf{e}\,senh(\mathbf{E})-\mathbf{E}\right)$$

$$\sqrt{\mathbf{GM_s}}\cdot\mathbf{a}^{-3/2}\cdot\mathbf{t} \;=\; \mathbf{e}\,senh(\mathbf{E})-\mathbf{E} \qquad [35]$$

e como **a** = **q** / (**e**-1) para a hipérbole, então a eq. [35]:

$$\sqrt{\mathbf{GM_s}}\cdot\mathbf{a}^{-3/2}\cdot\mathbf{t} \;=\; \mathbf{e}\,senh(\mathbf{E})-\mathbf{E} \qquad [35]$$

$$\sqrt{\mathbf{GM_s}}\cdot\frac{\mathbf{q}^{-3/2}}{(\mathbf{e}-1)^{-3/2}}\cdot\mathbf{t} \;=\; \mathbf{e}\,senh(\mathbf{E})-\mathbf{E} \qquad [36]$$

Equação parecida a obtida no cálculo das órbitas elípticas, neste caso a resolução da eq. [36] é idêntico ao da equação [17] ou [20], ou seja:

E = **e** *senh*(**E**) - **M**

M = **n.t**

n = $\mathbf{k}\dfrac{\mathbf{q}^{-3/2}}{(\mathbf{e}-1)^{-3/2}}$ onde $\mathbf{k} = \sqrt{\mathbf{GM_s}}$