Cálculo do determinante de uma matriz genérica 'n x n'.

1 - Metodologia:

1.1 - Reduzir a matriz 'n x n' para '1 x 1' (Pivotagem):

Ex.: - '4 x 4' p/ '1 x 1'

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \underline{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & \underline{b_{32}} & b_{33} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} c_{11} & \underline{c_{12}} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \underline{d_{11}} \end{vmatrix}$$

Onde:

$\underline{a_{23}} = P_4$ (Pivot da matriz de ordem 4);

$\underline{b_{32}} = P_3$ (Pivot da matriz de ordem 3);

$\underline{c_{12}} = P_2$ (Pivot da matriz de ordem 2);

$\underline{d_{11}} = P_1$ (Pivot da matriz de ordem 1).

1.2 - Calcular o determinante utilizando a fórmula:

$$\boxed{\Delta = \prod_{k=1}^{n} P_k^{\,2-k}}$$

2 - Pivotagem

2.1 - Escolha do pivot:

- Qualquer elemento, exceto zero.

2.2 - Operação básica:

- O determinante das Matrizes '2 x 2' originadas ao colocar-mos em evidência os elementos da linha/coluna onde se encontra o Pivot e cada elemento de seu menor complementar, dá origem aos elementos das matrizes subsequentes. Na matriz destino, observar a mesma disposição dos elementos do menor complementar da matriz de origem: -Ex.: '4x4' ➔ '3x3'

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \underline{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$\underline{a_{23}} = P_4$ (Pivot da matriz de ordem 4);

Obs.: $\det \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a*d - b*c$

$b_{11} = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & \underline{a_{23}} \end{vmatrix}$ $\quad b_{12} = \det \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & \underline{a_{23}} \end{vmatrix}$ $\quad b_{13} = \det \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ \underline{a_{23}} & a_{24} \end{vmatrix}$

$b_{21} = \det \begin{vmatrix} a_{21} & \underline{a_{23}} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\quad b_{22} = \det \begin{vmatrix} a_{22} & \underline{a_{23}} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\quad b_{23} = \det \begin{vmatrix} \underline{a_{23}} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$

$b_{31} = \det \begin{vmatrix} a_{21} & \underline{a_{23}} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$ $\quad b_{32} = \det \begin{vmatrix} a_{22} & \underline{a_{23}} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$ $\quad b_{33} = \det \begin{vmatrix} \underline{a_{23}} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

3 – Exemplos Numéricos

3.1 - $\begin{vmatrix} \underline{\mathbf{1}} & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{-8}} & 3 & 5 \\ -10 & 4 & -1 \\ -11 & 3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{-2}} & 58 \\ 9 & 39 \end{vmatrix} \Rightarrow |\underline{\mathbf{-600}}|$

$P_4 = 1$ $\quad P_3 = -8$ $\quad P_2 = -2$ $\quad P_1 = -600$

⇨ $\Delta = 75$

$$\boxed{\Delta = P_1^{2-1} * P_2^{2-2} * P_3^{2-3} * P_4^{2-4}}$$

Como podemos observar pelo exemplo acima P_2 é sempre um elemento neutro!

$$3.2 - \begin{vmatrix} 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \underline{1} & -3 & -8 \\ 0 & -5 & -10 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow |\underline{20}|$$

$P_4=1$ $P_3=1$ $P_1=20$

➔ $\Delta = 20$

$$\boxed{\Delta = P_1^{2-1} * P_2^{2-2} * P_3^{2-3} * P_4^{2-4}}$$

O cálculo é facilitado se o Pivot==1 ou –1 nas matrizes de ordem par.

4 – Considerações finais

4.1 – O método considerado é genérico, podendo ser aplicado às matrizes quadradas de qualquer ordem;

4.2 – Se este método for novidade p/ você, por favor, divulgue-o!

5 – Contato

Autor: Reinaldo M do Nascimento
Téc. Eletrônica –Magnesita S A – Contagem - MG
e-mail: reinaldomn@aol.com