TEOREMA DA SOMA NULA INFINITA E O NÚMERO INDETERMINADO

Edison Antonio Pires de Moraes

RESUMO

Este trabalho apresenta uma maneira nova e diferente de trabalhar com as indeterminações matemáticas que ocorrem como resultado de operações envolvendo o infinito e/ou o zero, através da criação de um novo teorema matemático e de um novo elemento matemático, permitindo trabalhar de forma consistente com tais indeterminações.

ABSTRACT

This work presents a new and different way to working with mathematical indeterminacies which occur as a result of operations involving infinity and / or zero, by creating a new mathematical theorem and a new mathematical element, allowing work consistently with such indeterminacies.

1. Introdução

De todas as questões matemáticas que costumam gerar algum tipo de controvérsia, a que envolve a divisão por zero pode ser considerada a mais interessante, pela sua simplicidade. Neste trabalho, veremos que é possível trabalhar matematicamente o resultado indeterminado da divisão de zero por zero e que os paradoxos resultantes ao se considerar como infinito a divisão de um número não nulo por zero podem ser contornados.

2. Limites com resultado tendente ao infinito

Inicialmente, vejamos a expressão abaixo:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{n}{m} = 0, \text{ onde } n \neq 0$$

De fato, para qualquer numerador real, quando o denominador tende ao infinito, o resultado tende a zero. Caso consideremos “m” como infinito, a expressão acima pode ser simplificada para a seguinte forma:

$$\frac{n}{\infty} = 0, \text{ onde } n \neq 0$$

Vejamos agora o seguinte limite:

$$\lim_{m \to 0} \frac{n}{m} = x$$

Tal limite não existe, visto que as aproximações laterais geram valores diferentes. Para verificar isso, construamos a tabela de aproximações, considerando n=1:

m=1	m=0,1	m=0,01	m=0,001	m=0,0001
x=1	x=10	x=100	x=1000	x=10000

Quadro 1 – Aproximação lateral a partir de números positivos, com “n = 1”

m=-1	m=-0,1	m=-0,01	m=-0,001	m=-0,0001
x=-1	x=-10	x=-100	x=-1000	x=-10000

Quadro 2 – Aproximação lateral a partir de números negativos, com “n = 1”

Os valores obtidos pelas aproximações a partir dos valores laterais geram resultados diferentes:

$$\lim_{m \to 0^+} \frac{n}{m} = +\infty, \text{ onde } n > 0$$

$$\lim_{m \to 0^-} \frac{n}{m} = -\infty, \text{ onde } n > 0$$

Logo:

$$\nexists \lim_{m \to 0} \frac{n}{m}$$

Nessas expressões, quando o denominador tende a zero, o resultado tende ao infinito. Percebemos que o sinal do infinito depende do que podemos chamar de “polaridade de aproximação”. Devido a esse fato, apesar de sabermos que é infinito, o resultado é, de certa forma, indeterminado.

3. Análise dos paradoxos resultantes da expressão $\lim_{m \to 0} \frac{n}{m}$

Sabemos que limites cujo divisor tende a zero geram resultados que tendem ao infinito. E se o divisor for zero? Neste trabalho será adotado o resultado proposto originariamente por Bhaskara Akaria, em seu livro Bijaganita, considerando o resultado como infinito, mas com o acréscimo da polaridade.

Nos quadros 1 e 2, temos que “n > 0”. Porém, os sinais dos infinitos resultantes são invertidos caso “n < 0”, conforme os quadros 3 e 4 abaixo, em que fizemos “n = -1”.

m=1	m=0,1	m=0,01	m=0,001	m=0,0001
x=-1	x=-10	x=-100	x=-1000	x=-10000

Quadro 3 – Aproximação lateral a partir de números positivos, com “n = -1”

m=-1	m=-0,1	m=-0,01	m=-0,001	m=-0,0001
x=1	x=10	x=100	x=1000	x=10000

Quadro 4 – Aproximação lateral a partir de números negativos, com “n = -1”

De onde retiramos os seguintes limites:

$$\lim_{m \to 0^+} \frac{n}{m} = -\infty, \text{ onde } n < 0$$

$$\lim_{m \to 0^-} \frac{n}{m} = +\infty, \text{ onde } n < 0$$

Consideremos o seguinte: ao dividirmos algo em partes, qualquer que seja o caso, tais partes poderão ser representadas unicamente pelo módulo numérico. Em uma *divisão pura*, não há que se considerar o sinal do número que divide, se é positivo ou negativo, uma vez que o número de partes sempre será idêntico.

Com base na *divisão pura*, podemos adotar os resultados obtidos nos quadros 3 e 4 como mais adequados no caso da divisão por zero propriamente dita. Veja que não estamos falando mais de limites, e sim de uma divisão pura e simples. Podemos considerar, com certa segurança, que o zero não tem sinal. Então, obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{n}{0} = +\infty, \text{ onde } n > 0$$

$$\frac{n}{0} = -\infty, \text{ onde } n < 0$$

Assim, a divisão por zero pode ser definida como resultando em infinito, seja ele positivo ou negativo. Um número negativo qualquer dividido por zero resulta em infinito negativo e um número positivo qualquer dividido por zero resulta em infinito positivo.

Entretanto, como já se sabe, tal definição gera alguns paradoxos, que tentaremos contornar. Iniciando o raciocínio, como protótipo, pode ser fixado o valor de “n” em 1 e o resultado como ignorado, ou um valor “x” qualquer.

$$\frac{1}{0} = x$$

Isso equivale a perguntar: qual número multiplicado por zero dá um? Obviamente, nenhum número conhecido. Suponhamos que “x” seja, de fato, infinito. Existem regras operatórias que devem ser obedecidas. Vejamos algumas delas.

Regra 1: $a \times \frac{b}{a} = b$

Substituindo:

$$0 \times \frac{1}{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \times \infty = 1$$

Entretanto, a operação seguinte também é válida:

$$0 \times \frac{2}{0} = 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \times \infty = 2$$

Onde chegamos à igualdade 1 = 2, o que é absurdo. Podemos fazer as operações com quaisquer números reais, e o resultado será a igualdade entre todos eles. Mas vamos trabalhar um pouco mais a regra.

$$a \times \frac{b}{a} = b$$

Fazendo “a=0”, “b=n” e o resultado igual a “x”, temos:

$$0 \times \frac{n}{0} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{0.n}{0} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{0}{0} = x, \qquad n \neq 0$$

Pode ser observado pelo exemplo acima que “b não é igual a b”, o que fere a regra operatória. Por outro lado, qualquer que seja o valor de “n”, o resultado será zero no numerador e como a expressão $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação, segue que o valor de “x” também é indeterminado.

Portanto, há uma certa lógica aqui, em que tanto “n” quanto “x”, que são os substitutos de “b” na regra operatória, são indeterminados.

Continuando o raciocínio, verifiquemos as expressões abaixo:

$$\frac{n}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{\pm\infty} = 0, \qquad n \neq 0$$

Há uma inversão nessa transposição. No caso de “n = 1”, poderíamos considerar que o infinito e o zero são inversos entre si. Entretanto, isso não é verdade, visto que “n” pode assumir qualquer valor não nulo. Considerar o infinito como o inverso de zero nos faria incorrer em erro. Além disso, há uma terceira transposição a fazer, que é a seguinte:

$$0 \times (\pm\infty) = n \mid n \in]-\infty, +\infty[\wedge n \neq 0$$

O que implica nas seguintes expressões:

$$0 \times (+\infty) = n \mid n \in]0, +\infty[$$

$$0 \times (-\infty) = n \mid n \in]-\infty, 0[$$

As expressões acima formam indeterminações matemáticas, nas quais “a soma de infinitos zeros resulta em um número qualquer no intervalo]-∞, +∞[”. Muito provavelmente, o valor resultante não poderá ser zero nem infinito. Essa ideia será o ponto de partida das operações que tentaremos provar aqui.

Prosseguindo, apliquemos outra regra operatória em que obteremos a divisão de zero por zero:

Regra 2: $a \times b = \frac{a}{(1 \div b)}$

Substituindo “a” por zero e “b” por infinito:

$$0 \times (\pm\infty) = \frac{0}{(\pm 1) \div (\pm\infty)}$$

$$0 \times (\pm\infty) = \frac{0}{0}$$

Fazendo $0 \times (\pm\infty) = n$ e $\frac{0}{0} = m$:

$$n = m, \text{ onde } \{n, m\} \neq 0$$

Como nos casos anteriores, “n” não é de fato igual a “m”, visto que ambos representam indeterminações matemáticas. Logo, a sentença “n = m” não pode ser considerada verdadeira. Apesar disso, podemos perceber que a mesma lógica da regra 1 se aplica aqui: tanto “n” quanto “m” representam valores indeterminados.

Passemos para a próxima substituição. Substituindo agora “a” por infinito e “b” por zero:

$$a \times b = \frac{a}{(1 \div b)} \quad \Rightarrow \quad (\pm\infty) \times 0 = \frac{\pm\infty}{(\pm 1) \div 0}$$

Temos que:

$$0 \times (\pm\infty) = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

O que nos leva às seguintes expressões:

$$0 \times (+\infty) = \frac{+\infty}{(+1 \div 0)} = \frac{+\infty}{+\infty} = n, \text{ onde } n > 0$$

$$0 \times (-\infty) = \frac{-\infty}{(+1 \div 0)} = \frac{-\infty}{+\infty} = n, \text{ onde } n < 0$$

$$0 \times (+\infty) = \frac{+\infty}{(-1 \div 0)} = \frac{+\infty}{-\infty} = n, \text{ onde } n < 0$$

$$0 \times (-\infty) = \frac{-\infty}{(-1 \div 0)} = \frac{-\infty}{-\infty} = n, \text{ onde } n > 0$$

Essas expressões são obtidas supondo que essa regra operatória possa ser aplicada nesse caso extremo. Como as regras operatórias parecem estar se comportando de forma consistente mesmo neste caso extremo, poderemos admitir que as expressões envolvendo o infinito geram indeterminações com sinal definido.

Apliquemos outra regra operatória a ambos os casos. Consideremos a seguinte expressão:

$$\pm\infty = \frac{n}{0}, \text{ onde } n \neq 0$$

Consideremos agora a seguinte regra operatória:

Regra 3: Se $a = \frac{b}{c}$, então $a \times d = \frac{b \times d}{c} = b \times \frac{d}{c}$

Na expressão, e por consequência na regra operatória, substituímos “a” por infinito e “c” por zero:

$$\pm\infty = \frac{b}{0} \quad \Rightarrow \quad (\pm\infty) \times d = \frac{b \times d}{0} \quad \Rightarrow \quad (\pm\infty) \times d = b \times \frac{d}{0}$$

Substituindo “d” por zero:

$$0 \times (\pm\infty) = \frac{b \times 0}{0} \quad \Rightarrow \quad 0 \times (\pm\infty) = \frac{0}{0} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{0}{0}, \quad \text{onde } n \neq 0$$

ou

$$0 \times (\pm\infty) = 0 \times \frac{b}{0} \quad \Rightarrow \quad 0 \times (\pm\infty) = 0 \times (\pm\infty) \quad \Rightarrow \quad n = n$$

Observe que a expressão “$0 \times (\pm\infty)$” foi substituída por “n”, que passou a ser uma incógnita com valor compreendido no intervalo]-∞, +∞[, excetuando o zero. Como “n” não tem valor fixo, a sentença “n = n” é falsa. Mas aqui também reflete a mesma lógica deduzida nas outras regras operatórias: os dois lados da equação são indeterminações.

Considerando o exposto acima, admitirei que as seguintes operações têm resultados compatíveis umas com as outras, já que todas geram indeterminações:

$$0 \times \pm\infty, \quad \frac{0}{0} \quad \text{e} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Assim temos as três expressões básicas:

1) $\frac{n}{\pm\infty} = 0$, onde $n \neq 0$

2) $\frac{n}{0} = \pm\infty$, onde $n \neq 0$

3) $0 \times (\pm\infty) = n$, onde $n \neq 0$

4. Indeterminações relativas e absolutas

Analisemos melhor a divisão de zero por zero. Podemos dizer que a indeterminação gerada pela divisão de zero por zero é maior que a multiplicação de zero pelo infinito. De fato, o domínio da indeterminação $\frac{0}{0}$ abrange números positivos e negativos, enquanto a indeterminação $0 \times (+\infty)$ abrange apenas números positivos e a indeterminação $0 \times (-\infty)$ abrange apenas números negativos. Por esse motivo, admitiremos que a divisão de zero por zero gera uma indeterminação absoluta, enquanto a multiplicação de zero por infinito gera uma indeterminação relativa.

$\frac{0}{0}$ $^{23}_{11}$ indeterminação absoluta

$0 \times \infty$ $^{23}_{11}$ indeterminação relativa

5. Inconsistência devida ao zero

Mas há uma inconsistência decorrente desse raciocínio por causa do zero, que é um caso especial na sequência numérica. Ao mesmo tempo que é um elemento gerador de indeterminações, ele próprio não pode ser gerado por uma indeterminação.

Dessa forma, há uma solução de continuidade nas indeterminações geradas, já que as mesmas não podem conter o zero. Mas por que não? Para tentar resolver essas situações, consideremos a reta dos números reais ilustrada na figura 1.

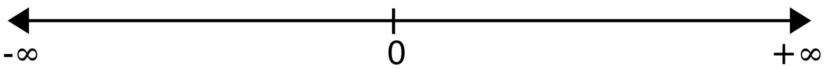

Figura 1 - Representação simplificada da reta numérica

É sabido que o número de pontos de uma reta é infinito, assim como o número de pontos de uma semirreta ou de um segmento de reta. Assim, consideremos “n” como o comprimento de um segmento qualquer da reta e 0 o comprimento do ponto. Sabemos que qualquer segmento de reta contém um número infinito de pontos de tamanho zero. Então, para uma reta de comprimento “n”, podemos fazer:

$$\frac{n}{\pm\infty} = 0, \text{ onde } n \neq 0$$

Podemos considerar um ponto como um segmento de reta de tamanho zero. Assim, se fizermos “n=0”, teremos que “n” representa o “comprimento” de um ponto. Então teremos a sentença:

$$\frac{0}{\pm\infty} = 0$$

Fazendo as transposições:

$$\frac{0}{0} = \pm\infty$$

$$0 \times (\pm\infty) = 0$$

No caso da divisão de zero por zero, já foi provado que o resultado é indeterminado e não infinito. Resulta que a sentença $\frac{0}{0} = \pm\infty$ é falsa.

Como consequência, a segunda transposição também resulta em uma indeterminação e seu valor não poderá ser zero. Resulta que a sentença $0 \times (\pm\infty) = 0$ é falsa.

Além disso, na expressão original, não há como pensar como poderia ser possível dividir zero por infinito, já que zero é o limite. Então não podemos dizer se a sentença $\frac{0}{\pm\infty} = 0$ é falsa ou verdadeira.

Vale ressaltar aqui que, muito embora a multiplicação de um número qualquer por zero resulte em zero, a multiplicação de zero por infinito resulta em um valor não nulo. Da mesma forma, a divisão de zero por um valor não infinito resulta em zero, mas são necessários mais elementos para entender em que resulta a divisão de zero por infinito.

Como pode ser visto, nos três casos “n” deve ser diferente de zero. Isso demonstra consistência entre as transposições.

Quanto à quebra de continuidade devido à ausência do número 0, podemos convencionar de forma a evitar essa descontinuidade:

$0 \times (+\infty) = n$, onde $n > 0$

$0 \times (-\infty) = n$, onde $n < 0$

6. Enunciado do teorema

Aparentemente, as expressões finais do item 5 estão livres de quaisquer anomalias ou contradições matemáticas. Esse raciocínio leva à criação de um teorema matemático:

Teorema da Soma Nula Infinita ou Teorema Zero: A soma de uma sequência infinita de zeros resulta em um valor não nulo.

7. Análise inicial das implicações do teorema

Analisando o valor não nulo obtido pela soma nula infinita, chegamos a uma conclusão curiosa. Sabemos que um segmento de reta possui infinitos pontos e que o resultado da soma nula infinita é um valor não nulo. Analisemos a reta numérica da figura 2:

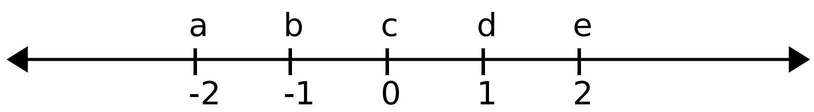

Figura 2

Como a soma nula infinita resulta em um valor não nulo, podemos associar seu valor com qualquer segmento de reta na reta numérica, já que os mesmos são constituídos por infinitos pontos. Assim temos que:

$0 \times \infty = \overline{cd}$

$0 \times \infty = \overline{ce}$

$0 \times \infty = \overline{ad}$

etc.

Podemos observar também que a reta numérica acima é composta por infinitos segmentos de reta. Tais segmentos de reta podem ser colocados em correspondência bijetora com os infinitos pontos de cada segmento, como ilustrado na figura 3.

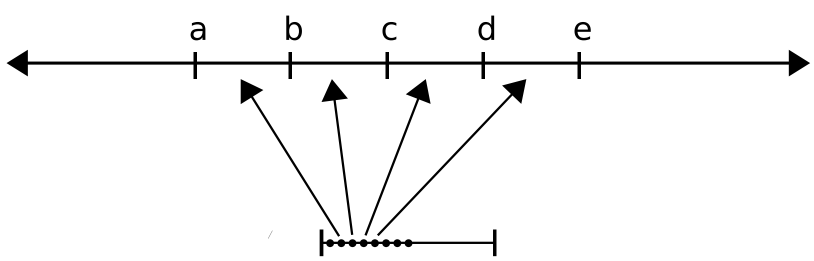

Figura 3 – Correspondência bijetora entre os pontos de um segmento de reta e o total dos segmentos de reta de uma reta completa

Temos que os segmentos de reta obtidos representam o conjunto dos números inteiros, já que os pontos de cada um deles podem corresponder um a um com os próprios segmentos em sequência na reta, que, em última análise, são *unidades*. Como os segmentos podem ter comprimentos diferentes podem representar também frações ou múltiplos. Então eles podem representar também os números racionais.

Mas os segmentos de reta representam números inteiros. Portanto, ao fazer operações entre eles, o resultado poderá ser expresso dentro dos próprios segmentos. Quase que certamente, tais segmentos podem representar todos os números algébricos.

Assim, cada número algébrico corresponderá tanto ao número infinito de pontos que compõem qualquer segmento de reta como os infinitos segmentos de reta em uma reta completa. Então temos que a "quantidade" de segmentos de reta em uma reta completa quanto a "quantidade" de pontos em um segmento de reta pertencem ao mesmo domínio, que no caso são os números algébricos, ou cardinalidade $\aleph_0$.

Já a "quantidade" de pontos da reta completa pertence a uma cardinalidade maior, cujos valores estão fora do domínio dos números algébricos. Podemos dizer isso com base no fato de que os pontos de um segmento de reta adjacente a outro estão fora do domínio deste último. Vejamos a figura 4.

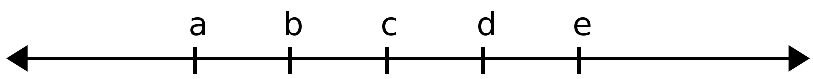

Figura 4

Tomemos o segmento $\overline{ab}$ e o segmento $\overline{cd}$. Pode ser visto claramente que os pontos que compõem o segmento $\overline{cd}$ estão fora do domínio dos pontos que compõem o segmento $\overline{ab}$, e vice-versa. Tais pontos transcendem os domínios respectivos. Por isso, os pontos de uma reta completa talvez possam representar os números transcendentais. Eles pertencem à cardinalidade $\aleph_1$.

8. O número indeterminado

De todo o raciocínio descrito acima e tomando como base o Teorema da Soma Nula Infinita, ou, como gosto de chamá-lo, Teorema Zero, podemos criar um novo elemento matemático, denominado número indeterminado e que representa, a priori, qualquer número algébrico positivo, ou o módulo de qualquer número algébrico. Fica aqui sugerido o uso do símbolo "Φ" para representar o número indeterminado. Então:

$$0 \times (+\infty) = \Phi, \text{ onde } \Phi = n \mid n \in \{\text{números algébricos}\} \wedge n > 0$$

Assim, o símbolo Φ (número indeterminado) representa, a priori, o módulo de um número algébrico positivo qualquer.