A UTILIZAÇÃO DO TRIÂNGULO DE PASCAL E DO BINÔMIO DE NEWTON NO LANÇAMENTO DE MOEDAS

(The use of Pascal's triangle and the Newton's binomial in launching coins)

Édel Alexandre Silva Pontes*

*Doutor em Ciências da Educação pela UTIC; Mestre em Estatística pela UFRJ; Licenciado em Matemática pela UFAL. Professor do Centro Universitário – CESMAC e do Instituto Federal de Alagoas – IFAL.

Resumo

Nosso trabalho visa fazer uma ponte entre o ensino médio e o ensino fundamental através de um experimento bastante simples – lançamento de moedas. A palavra contextualizar tem hoje na educação básica uma referência para construção de uma escola mais viva e dinâmica. È necessário ousar. Precisamos utilizar uma prática multidisciplinar em nossas bancas escolares, não apenas entre disciplinas do próprio período, como também entre toda estrutura do ensino fundamental e médio.

Palavras-chave: triângulo de Pascal. Teorema binomial. Probabilidades.

Abstract

Our work aims to make a bridge between high school and elementary school through a simple experiment - launching coins. The word context is today a reference in basic education to build a school more alive and dynamic. It is necessary to dare. We use a multidisciplinary practice in our school stands, not only between subjects of the period, but also between entire structure of elementary and high school.

Keywords: Triangle of Pascal, binomial theorem, probability.

1. Introdução

Com a reforma do ensino médio, a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), de 1996, a palavra contextualização ficou bastante evidenciada e tornou-se uma referência nas bancas escolares. Tratar os conteúdos de ensino de modo contextualizado significa fazer uma correlação entre a compreensão dos conhecimentos e a prática no dia a dia, isto é, aprender para a vida. É necessário estimular o aluno a ter certa autonomia intelectual. E para isso precisamos correlacionar não só conteúdos entre as disciplinas, como também criar possibilidades de interação entre o ensino fundamental e o ensino médio.

Para Mario Jorge Carneiro (2006),

> O tratamento contextualizado do conhecimento é um dos recursos que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Em Matemática, a contextualização é um instrumento bastante útil, desde que interpretada num sentido mais amplo e não empregada de modo artificial e forçado, ou que não se restrinja apenas a um universo mais imediato.

De acordo com o MEC, o aluno contextualizado ele deixa de ser um mero acumulador de conhecimentos e passa a ser um agente transformador de si mesmo e do mundo. O ensino da matemática para ter resultados significativos e compreensíveis, deve-se criar meios de ligação entre o abstrato e o concreto. E com certeza a contextualização é o carro chefe desse processo.

> A contextualização do saber é uma das mais importantes noções pedagógicas que deve ocupar um lugar de maior destaque na análise da didática contemporânea. Trata-se de um conceito didático fundamental para a expansão do significado da educação escolar. O valor educacional de uma disciplina expande na medida em que o aluno compreende os vínculos do conteúdo estudado com um contexto compreensível por ele. (PAIS, 2002, p.27)

Ensinar matemática é desenvolver a criatividade, o raciocínio lógico, o raciocínio espacial, a capacidade de resolver problema, estimular a capacidade algorítmica e o senso crítico. Devemos buscar alternativas para motivar nossos alunos a melhorar a aprendizagem, desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo e o interesse pela matéria, através das interações deste indivíduo com outras pessoas e com o cotidiano.

Segundo Suely Druck (2004):

> O bom treinamento em matemática é efetuado, necessariamente, com ênfase no argumento lógico, oposto ao autoritário, na distinção de casos, na crítica dos resultados obtidos em comparação com os dados iniciais do problema e no constante direcionamento para o pensamento independente. Esses hábitos são indispensáveis em qualquer área do conhecimento e permitem a formação de profissionais criativos e autoconfiantes - e a matemática é um campo ideal para o seu exercício.

Nosso trabalho tem como finalidade apresentar para alunos do ensino fundamental um método, bastante intuitivo, para o cálculo de probabilidades em experimentos aleatórios realizados de maneira independentes, com somente dois resultados possíveis - “sucesso” ou “fracasso”. Um resultado típico dessa situação é o lançamento de *n* moedas. Quando as moedas são não viciadas as probabilidades de caras e coroas são igualmente prováveis. Porem existem casos onde as moedas são tendenciosas fazendo com que as probabilidades de cara e coroa sejam diferentes.

O simples jogar de moedas passa a ter um efeito de curiosidade e descoberta no jovem pesquisador – o protagonista. O aprendizado e a compreensão do experimento apresentado eleva no aluno um desejo de tomada de decisão – “Qual o resultado mais provável ?”

O aluno quando chega na 8º ano do ensino fundamental encontra em seu caminho uma abordagem em matemática chamado produtos notáveis, que na maioria das vezes são digeridos por fórmulas decorativas. A motivação desse trabalho é exatamente mostrar uma aplicação bastante utilizada no cálculo das probabilidades, assunto este do ensino médio, que tem como pré-requisito fundamental os produtos notáveis.

2. *O Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton – Um Breve Histórico.*

Blaise Pascal foi um matemático francês, nasceu em Clermont em 1623 e morreu em Paris em 1662. No trabalho "*triângulo aritmético*", publicado em 1654, Pascal demonstrou diversas propriedades do triângulo e aplicou-as no estudo das probabilidades. Este famoso triângulo, chamado triângulo de Pascal, é apresentado através de um arranjo triangular de números em que cada número é igual a soma do par de números acima de si.

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 1\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}
\end{array}$$

Se contarmos as linhas e colunas do Triângulo começando em zero, o elemento da linha n e coluna p é $\binom{n}{p}$. Mas o triângulo é, de fato, muito mais antigo; surgiu pela primeira vez em 1303, em "*Precious Mirror of the Four Elements*", pelo matemático chinês Chu Shih-chieh.

Issac Newton nasceu em Woolsthorpe em 1642, Inglaterra, no mesmo ano da morte de Galileu. Primeiro cientista inglês de renome internacional, que além de químico, foi um excelente físico, mecânico e matemático, onde se consagrou em *cálculo infinitesimal*. Por volta de 1664, quando a universidade (Trinity College) foi fechada por causa da peste bubônica, Newton volta à sua cidade natal. Foi neste ano de retiro que construiu quatro de suas principais descobertas: *o teorema binomial*, o *cálculo*, a *lei da gravitação* e a *natureza das cores*. Em 1687 publica *Princípios matemáticos da filosofia natura*, a sua obra principal.

Teorema 01: Para todo inteiro não-negativo n e k, $n \le k$, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Prova: Utilizando a definição de números binomiais,

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{n!k}{k(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)}$$

$$=\frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

$$=\binom{n+1}{k}. \quad \square$$

Teorema 02 (Teorema Binomial): Seja A um anel, *x* e *y* dois elementos permutáveis de A, isto é *xy*=*yx*. Chama-se binômio de Newton todo binômio da forma $(x+y)^n = \sum_{p=o}^{n}\binom{n}{p}y^p x^{n-p}$, com $n \in \mathrm{N}$. Onde $\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Prova: Provaremos por indução matemática. É fácil observar que o teorema é verdadeiro para $n=0$ e $n=1$. Suponha que o teorema é verdadeiro para um inteiro positivo n . Então,

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$$

$$=(a+b)(\sum_{k=o}^{k=n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k)$$

$$=(\sum_{k=o}^{k=n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k)+(\sum_{k=o}^{k=n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1})$$

$$=\binom{n}{0}x^{n+1}+(\sum_{k=1}^{k=n}(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1})x^{(n+1)-k}y^k)+\binom{n}{n}y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n+1}{k} x^{(n+1)-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n+1} \binom{n+1}{k} x^{(n+1)-k} y^k .$$

O teorema é verdade para o inteiro $n+1$. Logo concluímos que o teorema é verdadeiro para todo inteiro não-negativo n. □

3. Aplicações

No processo de ensino aprendizagem um item fundamental e de especial relevância é a criação de problemas que associe o conhecimento abstrato com o cotidiano. O objetivo deste trabalho é associar o lançamento de moedas com o cálculo das probabilidades e mostrar que é possível, já no ensino fundamental, desenvolver essa experiência. Apresentaremos dois tipos de experiências com moedas:

Tipo 1: Análise probabilística no lançamento de moedas não viciadas.

Tipo 2: Análise probabilística no lançamento de moedas viciadas.

3.1. Tabela de Probabilidades no lançamento de moedas não viciadas (Tipo 1).

Nosso objetivo é jogar moedas, observar as faces superiores, e determinar probabilidades. Supondo que as moedas sejam não viciadas, a probabilidade de sair cara ou coroa é igualmente provável. Isto é:

$$\text{P(cara) = sucesso = x} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{P(coroa) = fracasso = y} = \frac{1}{2}.$$

Neste caso, usaremos o **Triângulo de Pascal** para a montagem da tabela de probabilidades. Usaremos X como o número de caras, na tabela abaixo:

Tabela 01

Tabela de Probabilidades no Lançamento de n moedas, independentes

X	PASCAL	PROBABILIDADES
0	$\binom{n}{0}$	$\frac{\binom{n}{0}}{2^n}$
1	$\binom{n}{1}$	$\frac{\binom{n}{1}}{2^n}$
2	$\binom{n}{2}$	$\frac{\binom{n}{2}}{2^n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	$\binom{n}{n}$	$\frac{\binom{n}{2}}{2^n}$
Total	2^n	$\frac{\binom{n}{0}}{2^n}$

Fonte: elaboração do Autor, 2012

3.2. Tabela de Probabilidades no lançamento de moedas viciadas (Tipo 2).

Supondo que as moedas sejam viciadas, a probabilidade de sair cara ou coroa não é igualmente provável. Ou seja, P(cara) ≠P(coroa). Suponha que:

$$\text{P(cara) = sucesso = x = } \frac{1}{a}; a \neq 0; a \in \mathrm{N}\,.$$

$$\text{P(coroa) = fracasso = y = } \frac{a-1}{a}; a \neq 0\,.$$

Devemos notar que a soma das Probabilidades do sucesso (x), e a do fracasso (y), é sempre 1. Neste caso, utilizaremos o **Binômio de Newton** para a montagem da tabela de probabilidades. Usaremos X como o número de caras, na tabela abaixo:

Tabela 02

Tabela de Probabilidades no Lançamento de n moedas viciadas, independentes

X	NEWTON	PROBABILIDADES
0	$\binom{n}{0}y^n$	$\binom{n}{0}\frac{(a-1)^n}{a^n}$
1	$\binom{n}{1}xy^{n-1}$	$\binom{n}{1}\frac{(a-1)^{n-1}}{a^n}$
2	$\binom{n}{2}x^2y^{n-2}$	$\binom{n}{2}\frac{(a-1)^{n-2}}{a^n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\binom{n}{n}x^n$	$\binom{n}{n}(\frac{1}{a})^n$
Total	-	1

Fonte: elaboração do Autor, 2012

5. Conclusão.

A necessidade de fazer com que os tópicos de matemática sejam apresentados a partir de modelos práticos, faz dessa aplicação – lançamento de moedas e cálculo de probabilidades - algo bastante significativa e motivadora para o entendimento dessa que é a ciência da vida.

Precisamos criar uma ponte entre a abstração matemática e seus resultados práticos. E observamos que, em muitos casos, o ensino da matemática fica preso a seqüências padrões que nos leva a um leque de fórmulas decorativas e sem utilização imediata na vida prática. O professor do ensino fundamental deve fazer com que haja em todas as suas cadeiras cientificas um processo de entendimento e interação da sua disciplina com os modelos do cotidiano.

O simples experimento de jogar moedas, sejam elas viciadas ou não, provoca no aluno um estímulo de querer compreender seu verdadeiro funcionamento. Abordagens como o Binômio de Newton, Triângulo de Pascal e o Cálculo de Probabilidades podem, sem muito esforço do educador, serem discutidas e estimuladas no ensino fundamental. E esse confronto das moedas tendenciosas ou não tendenciosas serve como um exemplo simples e eficiente.

Referências

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher. 1974.

CARNEIRO, Mario Jorge. **Matemática: por que se aprende, por que se ensina e o que é preciso ensinar?** Salto para o futuro / TV escola, internet 16/05/2006. UFMG.

DRUCK, Suely. **O Drama do Ensino da Matemática**. Folha de São Paulo 25/03/2004.

GERSTING, Judith L. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação**. 4.ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2001.

MORGADO, Augusto C. O. CARVALHO, João B. P. CARVALHO, P.C.P. & FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática – SBM, 1991.

PAIS, Luiz C. **Didática da matemática: uma analise da influencia francesa**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

ROSS, Kenneth A. WRIGHT, Charles R.B. **Matemáticas Discretas.** 2. ed. Cidade do México: Prentice Hall, 1990.